# QUELLEN UND STUDIEN
ZUR
# GESCHICHTE DER MATHEMATIK ASTRONOMIE UND PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER KOPENHAGEN
J. STENZEL HALLE
O. TOEPLITZ BONN

ABTEILUNG B:
## STUDIEN

BAND 3 – HEFT 1

(ABGESCHLOSSEN AM 22. NOVEMBER 1934)






BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1934

PREIS RM. 15,–

Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie u. Physik / Abt. B, Bd. 3, H. 1

Von den „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik" erscheinen in zwangloser Folge zwei Publikationen. Die eine Abteilung, A Quellen, umfaßt die eigentlichen Originalausgaben größeren Umfangs mit möglichst getreuer Übersetzung. Die zweite Abteilung, B Studien, enthält Abhandlungen, die mehr oder weniger mit dem Material der Quellen zusammenhängen. Vier Hefte der Abteilung B werden zu einem Bande zusammengefaßt, jährlich wird höchstens ein solcher Band erscheinen. Die Quellenbearbeitungen der Abteilung A bilden jeweils einzelne Bände.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen der Abteilung B zehn Sonderdrucke kostenfrei, weitere können auch gegen Berechnung nicht geliefert werden. Manuskriptsendungen sind an einen der drei Herausgeber zu richten:

Professor Dr. **O. Neugebauer,** Kopenhagen Ø, Blegdamsvej 15, Mathematisk Institut;
Professor Dr. **J. Stenzel,** Halle/S.-Cröllwitz, Schwuchtstraße 2;
Professor Dr. **O. Toeplitz,** Bonn, Wittelsbacher Ring 1.

Zugelassene Sprachen für Aufsätze der Abteilung B sind: Deutsch, Englisch, Französisch und Italienisch.

Manuskripte müssen in vollständig druckfertigem Zustand eingeliefert werden (möglichst in Schreibmaschinenschrift). Alle Korrekturkosten, die 10% der Satzkosten der jeweiligen Arbeit überschreiten, werden den Herrn Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Erledigung aller nichtredaktionellen Angelegenheiten, die die Zeitschrift betreffen, erfolgt durch die

**Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstraße 23/24.**
**Fernsprecher: Amt Kurfürst 6050–53 und 6326–28 sowie Amt Nollendorf 755–57.**

3. Band — Inhalt — 1. Heft

# QUELLEN UND STUDIEN
ZUR
# GESCHICHTE DER MATHEMATIK ASTRONOMIE UND PHYSIK

BEGRÜNDET VON O. NEUGEBAUER, J. STENZEL, O. TOEPLITZ

HERAUSGEGEBEN VON

O. NEUGEBAUER UND O. TOEPLITZ
KOPENHAGEN BONN

ABTEILUNG B:
## STUDIEN

BAND 3






BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, in Göttingen

# Inhalt des dritten Bandes.

## Erstes Heft.

Abgeschlossen am 22. November 1934. Seite



## Zweites Heft.

Abgeschlossen am 15. April 1936.



## Drittes Heft.

Abgeschlossen am 4. Juli 1936.

# Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra.

Von Jacob Klein.

## I. Teil.

Inhaltsverzeichnis.



### § 1.

### Einleitung. Absichten und Plan der Untersuchung.

Für die Konstitution der modernen mathematischen Naturwissenschaft ist die Schöpfung der mathematischen Formelsprache von entscheidender Bedeutung gewesen. Sieht man in dieser „symbolischen“ Darstellung ein bloßes Hilfsmittel, dessen sich die Naturerkenntnis bedient, um ihre Einsichten in möglichst einfacher und genauer Weise auszudrücken, so verkennt man sowohl den Sinn dieser Symbolik als auch die spezifischen Methoden der naturwissenschaftlichen Disziplinen überhaupt. Zwar ist es im 17. und 18. Jahrh. wohl möglich, die Erkenntnisse, die man von dem „natürlichen“ Zusammenhang der Dinge gewinnt, in unmathematischer Weise auszudrücken und zu vermitteln, aber schon damals, und gerade damals, bot nur die mathematische Form, der mos geometricus, eine Gewähr für die Zuverlässigkeit und Sicherheit jener Erkenntnisse. Nach drei Jahrhunderten intensiver Weiterarbeit ist es vollends unmöglich geworden, den Gehalt der mathematischen Physik von ihrer Form zu trennen. Die auch heute noch übliche, bis zu einem gewissen Grade mathematikfreie elementare Darstellung der physikalischen Erkenntnisse,

die auf die unmittelbare „Anschauung“ zurückgreift und, wie es scheint, ihre Grundbegriffe völlig voraussetzungslos gewinnt, darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß es unmöglich ist — und im Grunde immer unmöglich war —, den Sinn dieser Erkenntnisse unabhängig von ihrer mathematischen Darstellungsweise zu erfassen. Daher auch die unbehebbaren Schwierigkeiten, in die sich die Diskussion der modernen physikalischen Theorien verstrickt, wenn sowohl von Physikern wie von Nichtphysikern versucht wird, vom mathematischen Apparat abzusehen und die Ergebnisse der Forschung „gemeinverständlich“ vorzutragen. Diese enge Verflechtung der mathematischen Formelsprache mit dem Sinn der in der mathematischen Naturwissenschaft gewonnenen Einsichten gründet in der besonderen Art der Begrifflichkeit, die mit der modernen Wissenschaft als solcher gegeben und für ihren Aufbau von fundamentaler Bedeutung gewesen ist.

So erwächst die Aufgabe, zunächst einmal der Entstehung und der begrifflichen Struktur dieser Formelsprache nachzugehen, bevor man in die Diskussion der Probleme eintritt, vor die die mathematische Physik heute gestellt ist. Die vorliegende Arbeit sieht daher gänzlich von der Frage ab, wie der innere Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik, zwischen „Theorie“ und „Experiment“, zwischen „Systematik“ und „Empirie“ innerhalb der mathematischen Physik zu verstehen sei. Sie hat es nur mit der beschränkten Aufgabe zu tun, die heute fast ganz verschütteten Quellen unserer modernen symbolischen Mathematik wieder ein wenig sichtbar zu machen. Aber sie verliert dabei niemals jene erste Frage aus den Augen, die mit den heutigen begrifflichen Schwierigkeiten innerhalb der mathematischen Physik in unmittelbarem Zusammenhang steht. Ihre Fragestellung ist ihr stets durch dieses ihr eigentliches Thema vorgezeichnet, so weit sie sich auch bei ihren Untersuchungen von ihm entfernen mag.

Die Schöpfung der mathematischen Formelsprache ist identisch mit der Begründung der modernen Algebra. Vom 13. bis zur Mitte des 16. Jahrhs. wird im Abendlande die arabische Wissenschaft der „Algebra“ (al-g'abr wa'l-muqābala) in Gestalt einer Gleichungslehre rezipiert, die ihrerseits wahrscheinlich sowohl aus indischen wie aus griechischen Quellen gespeist wird[1]). Was die letzteren betrifft, so ist — wenn nicht bereits bei Muḥamad b. Mūsā al-Ḫwārasmī selbst, so doch jedenfalls vom 10. Jahrh. an[2]) — der besondere Einfluß der „Arithmetik“ Diophants auf den Inhalt und vor allem die Form dieser arabischen Wissenschaft nicht zu

[1]) s. J. Ruska, Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Sitz.-Ber. der Heidelb. Akad. d. Wiss., Philos.-hist. Kl., 1917, 2. Abh., bes. SS. 35, 49, 60 f., 69 f., 104, 109 f., 113 f. Offen bleibt die Frage, ob nicht die indischen Quellen ihrerseits wieder auf griechische oder auch auf ältere orientalische zurückweisen.

[2]) Vgl. Ruska, aaO., S. 28 und 69.

verkennen[1]). Während nun die von den Arabern dem Abendland überlieferte Gleichungslehre namentlich in Italien weiter ausgebaut wird, beginnt das Werk Diophants selbst bereits vom 15. Jahrh. an im Urtext bekannt und wirksam zu werden. Aber erst im letzten Viertel des 16. Jahrhs. unternimmt es Vieta, die Lehre und die Technik Diophants in entscheidender Weise zu erweitern und zu modifizieren. Er wird damit zum eigentlichen Begründer der modernen Mathematik.

Die üblichen Darstellungen dieser Entstehungsgeschichte verkennen nun zwar nicht die Bedeutung, die der Rezeption der griechischen Mathematik im 16. Jahrh. beizumessen ist. Aber sie setzen dabei durchweg das Faktum der symbolischen Mathematik in allzu selbstverständlicher Weise voraus. Sie geben sich nicht genügend Rechenschaft von der Art der begrifflichen Umwandlung, die sich mit dieser Rezeption der griechischen Mathematik vollzieht und damit erst die moderne Symbolik möglich macht. Ja, mehr als das: sie suchen zumeist auch die griechische Mathematik mit Hilfe der modernen Symbolik zu erfassen, als wäre diese letztere eine ganz äußerliche „Form", die jedem beliebigen „Inhalt" angepaßt werden könnte. Und selbst dort, wo ein genuines Verständnis der griechischen Wissenschaft als ideales Ziel vorschwebt, wird die Untersuchung von einer Begriffsebene aus angesetzt, die von vornherein — und gerade in den Grundbegriffen — durch die moderne Denkweise festgelegt ist. Von dieser soweit wie möglich abzusehen, muß das erste Anliegen unseres Unternehmens sein.

Es kommt also darauf an, die Rezeption der griechischen Mathematik im 16. Jahrh. nicht von ihren Ergebnissen aus zu beurteilen, sondern sie sich in ihrem faktischen Vollzuge zu vergegenwärtigen. Gerade in der Aneignung und Umformung der Diophantischen Technik durch Vieta haben wir gleichsam ein Stück der Naht vor uns, mit der die „neue" Wissenschaft an die alte geknüpft ist. Um aber die Art dieser Aneignung und Umformung in ihren wesentlichen Zügen aufklären zu können, müssen wir zunächst einmal das Werk Diophants von dessen eigenen Voraussetzungen aus in den Blick bekommen. Dann erst können wir daran gehen, die Vietasche „Ars analytice" von ihrem griechischen Fundament abzuheben, um auf diese Weise die begriffliche Umwandlung, deren Ausdruck sie ist, sichtbar zu machen.

Die „Arithmetik" Diophants muß folglich in den allgemeinen Rahmen der griechisch-hellenistischen Wissenschaft hineingestellt werden, in den sie hineingehört, wie immer man sich ihre weitere Vorgeschichte

[1]) Eine andere griechische Quelle scheinen die heute verschollenen Schriften des Anatolius (3. nachchristliches Jahrh.) gebildet zu haben. Vgl. Tannery, Zeitschrift f. Math. und Phys., Hist.-Lit. Abt., XXXVII, 1892, S. 41 ff., und Mémoires scientifiques II 428 ff.; IV 275 ff.

vorstellen mag. Das führt aber unmittelbar dazu, ihre Grundlagen mit denen der neuplatonischen „arithmetischen“ Literatur zu vergleichen, die ihren Hintergrund abgibt, in die sie sich aber nach den neuplatonischen Bestimmungen selbst in gar keiner Weise einordnen läßt. — Der Untersuchung der Klassifikation der mathematischen Wissenschaften bei den Neuplatonikern, die auf entsprechende Bestimmungen bei Plato selbst zurückgeht, ohne jedoch mit diesen identisch zu sein, sind die §§ 2—4 gewidmet. Sie zeigen, daß die neuplatonische Einteilung der Anzahlenkunde in „theoretische Arithmetik“ und „praktische Logistik“ (Rechenkunst) der „Verhältnis- und Proportionenlehre“ keine eindeutige Stellung zuzuweisen erlaubt. Dagegen scheint diese mit der von Plato postulierten „theoretischen Logistik“ identisch zu sein, die der „praktischen Logistik“ gegenüber eine ähnliche Stellung einnimmt wie die „theoretische Arithmetik“ gegenüber der „praktischen Arithmetik“. Sowohl die „theoretische Arithmetik“ wie die „theoretische Logistik“ haben es im Unterschied zu den entsprechenden praktischen Künsten nicht mit sinnlich wahrnehmbaren Dingen, sondern mit in sich unteilbaren „reinen“ Einsen zu tun, die untereinander völlig gleichartig sind und als solche nur vom Verstande erfaßt werden können. Beide theoretischen Disziplinen erwachsen unmittelbar einerseits aus dem faktischen Zählen und andererseits aus dem Rechnen, d. h. dem In-Beziehung-Setzen der Anzahlen untereinander, welche „praktischen“ Betätigungen sie auf ihre eigentlichen Voraussetzungen zurückzuführen haben. Aus neuplatonischen Kommentaren zu den platonischen Definitionen der Arithmetik und der Logistik im „Charmides“ und im „Gorgias“ läßt sich entnehmen, daß es die Arithmetik hierbei auf die „εἴδη“ der Anzahlen, die Logistik dagegen auf deren „ὕλη“ abgesehen hat.

Daß nun die platonische Forderung einer theoretischen Logistik als des noetischen Analogons und der Voraussetzung jeglicher Rechenkunst bei den Neuplatonikern keine Beachtung findet, ist — wie § 5 zu zeigen hat — wesentlich in der Eigenschaft der Unteilbarkeit der noetischen Monaden begründet: die bei Rechnungen unumgängliche Verwendung von Bruchteilen der Recheneinheit kann auf diese Weise nicht gerechtfertigt werden. Dazu kommt die auf der Entdeckung inkommensurabler Größen beruhende Ausgestaltung der Verhältnislehre zur allgemeinen Proportionenlehre, die über den Bereich der Anzahlenkunde überhaupt hinausführt.

Die Schwierigkeiten, die sich aus der platonischen Forderung einer theoretischen Logistik ergeben, können aber erst ganz verstanden werden, wenn man sich die ontologischen Grundlagen vergegenwärtigt, die für diese Konzeption maßgebend sind. — Dies erfordert zunächst eine grundsätzliche Klärung des ἀριθμός-Begriffs, wie er aller griechischen Arith-

metik und Logistik zugrunde liegt. Es läßt sich zeigen (§ 6), daß ἀριθμός niemals etwas anderes bedeutet als: „eine bestimmte Anzahl von bestimmten Dingen“. Die theoretische Arithmetik erwächst erstmalig aus der Einsicht, daß wir beim Abzählen von beliebigen Dingen bereits über ein Vor-wissen um „Anzahlen“ verfügen, die als solche nur Anzahlen „indifferenter“ Gebilde, nämlich Verbände „reiner“ Einsen sein können. Die Frage nach der Möglichkeit solcher Verbände, die Frage nämlich, wie es denn möglich sei, daß viele Einsen je eine Anzahl von Einsen bilden können, führt dazu, einheitsstiftende εἴδη mit bestimmten „Art-eigenschaften“ aufzusuchen, die eine Klassifikation aller Anzahlen gestatten. Die griechische Arithmetik stellt somit ursprünglich in der Tat nichts anderes als die Lehre von den εἴδη der Anzahlen dar, während für das „Rechnen“ — und folglich auch für die theoretische Logistik — die Anzahlen nur in bezug auf ihren „Stoff“, ihre ὕλη, eben die Einsen als solche, in Betracht kommen. Die Möglichkeit einer theoretischen Logistik hängt also ganz und gar von der Auffassung der Seinsweise der „reinen“ Einsen ab.

Im folgenden (§ 7) wird daher auf die pythagoreisch-platonische Philosophie in ihrem Verhältnis zu den Grundfragen der griechischen Mathematik eingegangen. — In einem 1. Abschnitt (§ 7 A) werden die allgemeinen Gesichtspunkte der pythagoreischen kosmologischen „Mathematik“ dargestellt und deren Zusammenhang mit dem ἀριθμός-Begriff als solchem aufgewiesen. Ein 2. Abschnitt (§ 7 B) zeigt die Bedeutung auf, die die platonische Philosophie dem „Zählen- und Rechnen-Können“ beimißt: in der „reinen“ Arithmetik und der „reinen“ Logistik gelingt es der menschlichen διάνοια, sich des eigentlichen Gegenstandes und der eigentlichen Voraussetzungen ihrer — stets an die αἴσθησις gebundenen — Tätigkeit bewußt zu werden. Ein 3. Abschnitt endlich (§ 7 C) geht den Konsequenzen nach, die sich für Plato aus dieser bevorzugten Stellung der Anzahlenkunde ergeben. In der Struktur des ἀριθμός-Begriffs findet er die Möglichkeit einer grundsätzlichen Lösung der μέθεξις-Frage, zu der die „Dialektik“ notwendigerweise hinführt, ohne sie jedoch von sich aus lösen zu können. Innerhalb des Bereiches der Ideen selbst wiederholt Plato damit den pythagoreischen Versuch einer „arithmologischen“ Gliederung alles Seienden, was zugleich eine entscheidende Korrektur der eleatischen Einheitsthese bedeutet.

Gegen die dieser platonischen Lehre zugrunde liegende Auffassung der Anzahlen, sowohl der eidetischen wie der mathematischen, als Gebilden mit eigenständigem und von allem Sinnlichen ursprünglich „abgelöstem“ Sein, wendet sich nun die aristotelische Kritik (§ 8). Sie zeigt, daß die „reinen“ Einsen nur das Produkt einer durch den Verstand vorgenommenen „Reduktion“ darstellen, die alles Zählbare in einen „neu-

tralen“ Stoff verwandelt. Den „reinen“ Einsen kommt also kein eigenes Sein zu. Ihre Unteilbarkeit ist nur ein Ausdruck dafür, daß das Zählen — und Rechnen — jeweils eine letzte, nicht weiter reduzierbare „Einheit“ voraussetzt, die als das vorgegebene „Maß“ zu verstehen ist. Nichts hindert folglich, im Verlauf einer Rechnung ein neues, „kleineres“ Maß einzuführen, anders ausgedrückt: mit Bruchteilen der zuerst angenommenen Einheit zu operieren. — Erst von dieser aristotelischen Auffassung aus läßt sich somit die platonische Forderung einer „wissenschaftlichen“ Logistik verwirklichen.

Der 2. Teil der Arbeit wendet sich dann dem Verhältnis der symbolischen Algebra zur Diophantischen „Arithmetik“ zu. — Nach allgemeinen Erörterungen über die Differenz antiker und moderner Begrifflichkeit (§ 9) wird von den im 1. Teil gewonnenen Ergebnissen aus das Werk Diophants als „theoretische Logistik“ gedeutet, die in ihren Problemstellungen und -lösungen stets an den griechischen ἀριθμός-Begriff gebunden bleibt, mag hier auch offensichtlich eine allgemeinere, vorgriechische „algebraische“ Tradition ihre Fortsetzung finden (§ 10).

Die letzten §§ 11 und 12 endlich stellen die Umformung der Diophantischen Technik durch Vieta und Stevin dar. Sie zeigen, daß die Rezeption der griechischen Logistik im 16. Jahrh. selbst bereits ein „symbolisches“ Zahlverständnis zur Vorraussetzung hat, und suchen die begriffliche Struktur der auf diese Weise entstehenden algebraischen Symbolik aufzuhellen. In eins damit gehen sie der mit dem symbolischen Zahlverständnis eng zusammenhängenden allgemeinen Wandlung im „wissenschaftlichen“ Bewußtsein der neueren Jahrhunderte nach, wie sie sich in ihren charakteristischen Zügen namentlich bei Stevin nachweisen läßt.

## § 2.
## Der Gegensatz von Logistik und Arithmetik bei den Neuplatonikern.

Die neuplatonische Mathematik ist durch eine fundamentale Unterscheidung bestimmt, die zwar mit der Idee der griechischen Wissenschaft überhaupt gegeben ist, hier aber eine überaus scharfe terminologische Fixierung erfährt. Der eine Zweig der Mathematik hat danach Teil an der Betrachtung desjenigen, was in keiner Weise der Veränderung, dem Entstehen und Vergehen unterworfen ist, was also so, wie es ist, immer ist und daher allein dem Wissen zugänglich ist: denn das im Wissen Gewußte, als mitteilbares und lehrbares Gut, muß ein ein für allemal Feststehendes sein. Innerhalb des Seienden, das diesen Charakter aufweist, kommt der Mathematik ein bestimmter Bereich zu, all das nämlich, was mit den Fragen: Wie groß? und Wie viel? zusammenhängt. Sofern die Objekte der Mathematik die Bedingung erfüllen, die der Grieche an die

Gegenstände des Wissens stellt, sind sie nicht Gegenstände der Sinne (αἰσθητά), sondern nur solche des Verstandes (νοητά). Die mathematischen νοητά gliedern sich in zwei Gebiete. Es sind dies: 1. die kontinuierlichen Größen — Linie, Fläche, Körper, 2. die „diskreten" Anzahlen — zwei, drei, vier usf. Entsprechend sind zwei Teile dieses Zweiges der Mathematik zu unterscheiden: die Geometrie und die Arithmetik. — Der andere Zweig der Mathematik dagegen geht auf die Behandlung und Beherrschung der αἰσθητά, sofern sie Größen- bzw. Anzahlenbestimmungen unterliegen. Hierher gehören Geodäsie als Landvermessungskunst und allgemeiner: als Meßkunst überhaupt, Logistik als Rechenkunst, ferner Musik (Harmonik), Optik, Mechanik. Die Astronomie nimmt eine Sonderstellung ein, insofern sie bald dieser Gruppe, bald der Geometrie und Arithmetik beigesellt wird. — Wie alle diese Bestimmungen, so geht insbesondere der Gegensatz zwischen der „reinen" Anzahlenkunde und der „praktischen" Rechenkunst auf Plato zurück. Doch ist dieser Gegensatz bei Plato terminologisch und vor allem auch sachlich keineswegs so eindeutig wie bei den Neuplatonikern festgelegt, was von der Forschung häufig genug verkannt worden ist.

Die neuplatonischen Hauptquellen, die uns in diesem Punkte zur Verfügung stehen, sind: 1. eine Stelle im Euklid-Kommentar des Proklus (Friedlein 38—40), wo Proklus die Meinung des Geminos über die Einteilung der mathematischen Wissenschaften referiert; 2. ein — vielzitiertes — Scholion zu Platos Charmides 165 E (Hermann VI, 290), das zum großen Teil identisch ist mit den Abschnitten 1 und 5 des sog. Geminosfragments in den „Definitionen" des Heron (Schmidt-Heiberg IV, 98 ff., Def. 135, 5—6)[1]; 3. einige — weniger bekannte — Stellen aus den Scholien des Olympiodor zu Platos Gorgias 450 D und 451 A—C (Neue Jahrb. f. Philol. und Pädagog. [Jahns Jahrbücher], 14. Suppl.-Bd., Lpz. 1848, S. 131 f.); 4. ein anderes — ebenfalls kaum zitiertes — anonymes Scholion zu derselben Gorgiasstelle (Hermann VI, 301).

1. Bei Proklus heißt es, nachdem unmittelbar vorher die Rede von der Geodäsie im Verhältnis zur Geometrie gewesen ist: οὐδ' αὖ ὁ λογιστικὸς αὐτὰ καθ' ἑαυτὰ θεωρεῖ τὰ πάθη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' ἐπὶ τῶν αἰσθητῶν, ὅθεν καὶ τὴν ἐπωνυμίαν αὐτοῖς ἀπὸ τῶν μετρουμένων τίθεται, μηλίτας καλῶν τινας καὶ φιαλίτας: „ebensowenig betrachtet der Rechenkundige die Eigenschaften der Anzahlen, wie sie in sich selbst sind [was der Anzahlenkundige tut], sondern [er betrachtet sie] an den sinnlich wahrnehmbaren Dingen, weswegen er ihnen [den Anzahlen] auch Namen beilegt, die von den gemessenen [gezählten] Dingen hergenommen sind,

---

[1]) Sowohl das Scholion wie das Geminos-Fragment führt Tannery auf Anatolius zurück, der seinerseits aus Geminos geschöpft habe (La géométrie grecque, 1887, S. 42—49).

indem er manche von ihnen «Apfelzahlen» und «Schalenzahlen» nennt." — Hier ist unmittelbar auf Plato, Gesetze VII, 819 B, C Bezug genommen, wo Anweisungen für den Rechenunterricht der Kinder gegeben werden.

2. Viel ausführlicher ist das Charmides-Scholion: λογιστική ἐστι θεωρία τῶν ἀριθμητῶν, οὐχὶ δὲ τῶν ἀριθμῶν μεταχειριστική, οὐ τὸν ὄντως ἀριθμὸν λαμβάνουσα, ἀλλ' ὑποτιθεμένη τὸ μὲν ἓν ὡς μονάδα, τὸ δὲ ἀριθμητὸν ὡς ἀριθμόν, οἷον τὰ τρία τριάδα εἶναι καὶ τὰ δέκα δεκάδα· ἐφ' ὧν ἐπάγει τὰ κατὰ ἀριθμητικὴν θεωρήματα. θεωρεῖ οὖν τοῦτο μὲν τὸ κληθὲν ὑπ' Ἀρχιμήδους βοεικὸν πρόβλημα, τοῦτο δὲ μηλίτας καὶ φιαλίτας ἀριθμούς, τοὺς μὲν ἐπὶ φιαλῶν, τοὺς δὲ ἐπὶ ποίμνης· καὶ ἐπ' ἄλλων δὲ γενῶν τὰ πλήθη τῶν αἰσθητῶν σωμάτων σκοποῦσα, ὡς περὶ τελείων ἀποφαίνεται. ὕλη δὲ αὐτῆς πάντα τὰ ἀριθμητά· μέρη δὲ αὐτῆς αἱ Ἑλληνικαὶ καὶ Αἰγυπτιακαὶ καλούμεναι μέθοδοι ἐν πολλαπλασιασμοῖς καὶ μερισμοῖς, καὶ αἱ τῶν μορίων συγκεφαλαιώσεις καὶ διαιρέσεις, αἷς ἰχνεύει τὰ κατὰ τὴν ὕλην ἐμφωλευόμενα τῶν προβλημάτων τῇ περὶ τοὺς τριγώνους καὶ πολυγώνους πραγματείᾳ. τέλος δὲ αὐτῆς τὸ κοινωνικὸν ἐν βίῳ καὶ χρήσιμον ἐν συμβολαίοις, εἰ καὶ δοκεῖ περὶ τῶν αἰσθητῶν ὡς τελείων ἀποφαίνεσθαι: „die Logistik ist eine Wissenschaft, die sich mit den gezählten Dingen, nicht aber mit den Anzahlen befaßt, indem sie nicht die Anzahl, die in ihrem Sein selbst Anzahl ist, ergreift, sondern indem sie das, was jeweils eins ist [nämlich ein bestimmtes Ding], als die Eins selbst zugrunde legt und das jeweils Gezählte [die gezählten Dinge] als die Anzahlen selbst, so daß ihr z. B. drei Dinge als «Drei» und zehn als «Zehn» gelten[1]); auf diese Dinge wendet sie die Theoreme der [reinen] Arithmetik an. Sie betrachtet also einerseits die von Archimedes als Rinder-Problem bezeichnete Aufgabe[2]) und andererseits «Schafzahlen» und «Schalenzahlen», die einen an Schalen, die anderen an einer Schafherde[3]); auch bei anderen Gattungen sinnlich wahrnehmbarer Körper untersucht sie deren Mengen und äußert sich über diese, wie wenn sie es mit in sich selbst vollkommenen Gebilden zu tun hätte. Ihr Stoff sind alle zählbaren Dinge. Ihre Teile sind die als hellenisch und als ägyptisch bezeichneten Weisen des Vorgehens beim Vervielfältigen und beim Aufteilen[4]), ferner das Zusammen-

[1]) Vgl. Theon, Hiller 19, 13—22.

[2]) Vgl. Archimedes, Opera (Heiberg) II[1], 450 f. = II[2], 528 ff.

[3]) μῆλον heißt sowohl Apfel wie Schaf — auch hier ist auf die oben genannte Stelle in Platos Gesetzen zu verweisen.

[4]) Vgl. Tannery, La géométrie grecque, S. 49 f.; Hultsch, Pauly-Wissowa v. „Arithmetica" §§ 8, 9 (S. 1070 ff.); Heath, A history of greek mathematics I, 1921, S. 52–54. — Neuerdings hat Neugebauer die uns heute noch zugänglichen Dokumente der ägyptischen „Logistik" zusammengestellt: „Arithmetik und Rechentechnik der Ägypter" in Quellen und Studien, B. I, 301 ff. Zur vorliegenden Arbeit überhaupt vgl. besonders S. 377 f.

zählen und das Auseinanderlegen von Brüchen, wodurch sie bei den Aufgaben auf dem Lehrgebiet der Dreieckszahlen und Polygonalzahlen das hier seinem Stoff nach Verborgene aufspürt [1]). Ihr Ziel ist, dem Lebens- und Handelsverkehr zu dienen, auch wenn sie sich über die mit den Sinnen wahrnehmbaren Dinge wie über in sich selbst vollkommene Gebilde zu äußern scheint."

3. Etwas abweichend stellt Olympiodor den Gegensatz dar: δεῖ εἰδέναι ὅτι διαφέρουσι, τῷ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν περὶ τὰ εἴδη τῶν ἀριθμῶν καταγίνεσθαι, τὴν δὲ λογιστικὴν περὶ τὴν ὕλην. εἴδη δὲ ἀριθμοῦ δύο· τό τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν. καὶ πάλιν τοῦ μὲν ἀρτίου εἴδη τρία, κτλ.: „man muß wissen, daß folgender Unterschied besteht: die Arithmetik beschäftigt sich mit den Arten der Anzahlen, die Logistik dagegen mit ihrem Stoff. Die Anzahl weist zwei Arten auf: das Gerade und das Ungerade; das Gerade wiederum weist drei Arten auf" (folgt die Einteilung des Geraden und auch des Ungeraden nach Nikomachos [Hoche 14ff., 25ff.], auf den Olympiodor ausdrücklich verweist). — Er fährt fort: ὕλη δέ ἐστι τὸ πλῆθος τῶν μονάδων, οἷον ὁ πολλαπλασιασμός, ὅ ἐστι τετράκις δ̄ καὶ πεντάκις ε̄ καὶ τὰ τοιαῦτα. καὶ οὐ μόνον τοῦτο. οὕτω γὰρ ἂν [ἡ] εὐεπίβα[σ]τος (Jahn) ἦν πᾶσιν, εἴγε καὶ οἱ μικροὶ παῖδες ἴσα⟨σιν⟩ (d. Verf.) τοὺς πολλαπλασιασμούς. ἀλλὰ καὶ γλάφυρά τινα διδάσκει: „der Stoff der Anzahlen dagegen ist die Menge der einzelnen [jeweils zu zählenden oder zu berechnenden] Einheiten. Z. B. die Vervielfältigung: vier mal vier, fünf mal fünf und dergleichen [betrifft diesen Stoff]. Aber nicht nur dies, denn so wäre [die Logistik] allen leicht zugänglich, wo doch selbst die kleinen Kinder (zu vervielfältigen verstehen). Sie lehrt auch gewisse Feinheiten": folgen als Beispiele zwei eingekleidete Aufgaben — eine davon mit Zahlenwerten —, die den (sog. arithmetischen) Epigrammen 51 [2]) (vgl. auch 13) und 7 aus dem XIV. Buch der Anthologia Palatina entsprechen (abgedruckt u. a. im 2. Bd. der Diophantausgabe von Tannery S. 53 [51 f.] und 46 f.). — In Übereinstimmung damit sagt Olympiodor etwas weiter, im engsten Anschluß an den platonischen Text (Gorg. 451 A—C): ἰστέον γὰρ ὅτι περὶ ἃ ἡ ἀριθμητικὴ καταγίνεται, περὶ ταῦτα καὶ ἡ λογιστική, περὶ τὸ ἄρτιον καὶ περὶ τὸ περιττόν. ἀλλ' ἡ μὲν ἀριθμητικὴ περὶ τὸ εἶδος αὐτῶν, ἡ δὲ λογιστικὴ περὶ τὴν ὕλην· τῷ μὴ μόνον καθ' αὑτὰ ἀλλὰ καὶ πρὸς ἄλληλα πῶς

---

[1]) Tannery, La géométrie grecque, S. 50, glaubt hier auf Diophantische Probleme verweisen zu können. Wahrscheinlich sind damit auch numerische Berechnungen an Dreiecken und Vielecken gemeint, wie sie z. B. im 1. Buch der „Metrik" des Heron vorliegen (vgl. Tannery selbst aaO., S. 47 f.; andererseits den Text bei Diophant, ed. Tannery, I, 14, 25—27).

[2]) Der Zahlenwert 8 in der Aufgabe Olympiodors, der eine ganzzahlige Auflösung gestattet, ist hier durch den Wert 10 ersetzt. Dieselbe Aufgabe (mit dem Wert 10) findet sich übrigens, auf ihren „abstrakten" Ausdruck gebracht, bei Diophant I, 21.

ἔχει πλήθους ἐπισκοπεῖν. ὁ γὰρ πολλαπλασιασμὸς ἢ πρὸς ἑαυτὸν γίνεται, ἢ πρὸς ἄλληλα[1]). πρὸς ἑαυτόν, ὅταν πολλαπλασιάσω τὸν ἄρτιον ἐπὶ ἄρτιον ἢ περιττὸν ἐπὶ περιττόν· πρὸς ἄλληλα[1]) δέ, ὅταν περιττὸν ἐπὶ ἄρτιον ἢ ἄρτιον ἐπὶ περιττόν: „man muß wissen, daß eben damit, womit sich die Arithmetik beschäftigt, sich auch die Logistik befaßt, nämlich mit dem Geraden und mit dem Ungeraden. Aber die Arithmetik handelt von deren Art, die Logistik dagegen von deren Stoff, und zwar insofern, als sie sie nicht nur für sich selbst, sondern auch im Hinblick darauf betrachtet, wie sie sich zueinander ihrer Menge nach verhalten. Denn die Vervielfältigung geschieht entweder unter denselben Arten oder unter verschiedenen: unter denselben, wenn ich Gerades mit Geradem vervielfältige, oder Ungerades mit Ungeradem; unter verschiedenen, wenn Ungerades mit Geradem oder Gerades mit Ungeradem."

4. Olympiodor exemplifiziert den Sachverhalt an der Multiplikation. Etwas deutlicher ist im anonymen Scholion zur gleichen Stelle des Gorgias davon die Rede: τοὺς γὰρ πολλαπλασιασμοὺς καὶ τοὺς μερισμοὺς ἡ λογιστικὴ θεωρεῖ τοὺς τῶν ἀριθμῶν, ᾧ καὶ δῆλον ὅτι τὸ ποσὸν τὸ ἐν αὐτοῖς καὶ τὴν ὕλην περιεργάζεται. πολλαπλασιάζεται γὰρ ἀριθμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν οὐ κατὰ τὸ εἶδος ἀλλὰ κατὰ τὰς ὑλικὰς μονάδας, καὶ μερίζεται κατὰ τὸ ποσὸν ἀλλ' οὐ κατὰ τὸν λόγον ᾧ διαφέρουσιν ἀλλήλων οἱ ἀριθμοί. τὸ τοίνυν πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλα κατὰ τὸ πλῆθος τοῦτο ἐνδείκνυται, πῶς πολλαπλασιάζονται καὶ μερίζονται παρ' ἀλλήλους κατὰ τὸ ἐν αὐτοῖς ποσόν: „die Logistik betrachtet die Vervielfältigungen und die Aufteilungen der Anzahlen, wodurch auch klar ist, daß sie sich um das [jeweils bestimmte] Wieviel in ihnen und um den Stoff bemüht. Denn eine Anzahl wird von einer Anzahl vervielfältigt nicht hinsichtlich ihrer Art, sondern hinsichtlich ihrer «Stoff»-Einheiten; ebenso wird eine Anzahl aufgeteilt hinsichtlich ihres Wieviel, nicht aber hinsichtlich der die Art betreffenden Bestimmungen, durch die sich die Anzahlen voneinander unterscheiden. Die Worte also «wie sie sich der Menge nach zueinander verhalten» [Paraphrase der platonischen Worte] bedeuten dies: in welcher Weise sie sich gegenseitig vervielfältigen und aufteilen gemäß dem ihnen innewohnenden Wieviel." —

Diese Zeugnisse stellen jedenfalls folgendes sicher: sowohl die Bezugnahme des Proklus und des Charmides-Scholions auf Platos Anweisungen für den Rechenunterricht der Kinder als auch die Beispiele des Charmides-Scholions, Olympiodors und des Gorgias-Scholions (Multiplikation, Division, Bruchrechnung, eingekleidete Aufgaben, die — wie wir heute sagen —

[1]) In dem von Jahn edierten Text steht πρὸς ἄλλα, vgl. aber dazu das folgende Scholion zu Gorg. 451 C (Hermann VI, 301): πρὸς αὑτά, ὡς ὅταν ἄρτιος (sc. ἀριθμός) πρὸς ἄρτιον ἢ περιττὸς πρὸς περιττὸν πολλαπλασιασθῇ· πρὸς ἄλληλα δέ, ὅταν περιττὸς πρὸς ἄρτιον ἢ ἀνάπαλιν und den platonischen Text selbst (s. weiter unten S. 29).

zu Gleichungen mit mehreren Unbekannten führen) beweisen, daß die Logistik darüber belehrt, in welcher Weise man vorgehen muß, um zu der Lösung von Fragen zu gelangen, die sich auf eine oder mehrere Mengen von zählbaren Dingen beziehen. Sie lehrt, die jeweilige Anzahl dieser Dinge zu bestimmen, zu „berechnen". In der Rechnung kommt es nur auf das Ergebnis an, das je nach den vorgegebenen Mengen ein verschiedenes ist. Aber die Möglichkeit der Rechnung ist in bestimmten unveränderlichen Eigenschaften der Anzahlen „selbst" begründet. Mit diesen hat es die Arithmetik zu tun. Sie „rechnet" nicht mit den Anzahlen, sondern betrachtet deren Eigenschaften und Arten, wie sie in sich selbst sind[1]), nicht etwa, wie sie sich an den zählbaren Dingen ablesen lassen. Das Rechnen mit den Anzahlen stellt nur eine „Anwendung" der „reinen" arithmetischen Sachverhalte, die Logistik nur eine „angewandte" Arithmetik dar, die vor allem praktischen Zwecken dient. Was den neuplatonischen Kommentatoren und Scholiasten dagegen als „reine" Arithmetik vor Augen steht, sind die Einteilungen der Anzahlen und die Darstellung ihrer gegenseitigen Beziehungen, wie wir sie aus den ersten Andeutungen in Platos Theaetet (147 D—148 B) und Parmenides (143 E—144 A), aus manchen Hinweisen des Aristoteles (z. B. Anal. post. A 4, 76 b 7 f.; Met. Δ 14, 1020 b 3 ff.), aus Euklid VII, VIII, IX und endlich aus den Lehrbüchern des Theon von Smyrna, des Nikomachos von Gerasa (und seiner Kommentatoren) und des Domninos von Larissa kennen.

Aber eine Unklarheit bleibt bestehen: während die beiden ersten — auf Geminos zurückweisenden — Zeugnisse das Gebiet der Logistik mit dem Bereich der sinnlich wahrnehmbaren Dinge identifizieren, in welchem die Berechnungen vor sich gehen, und darüber hinaus einen Bereich „reiner" Anzahlen annehmen, mit denen sich die Arithmetik befaßt, scheint Olympiodor — und mit ihm das letzte Gorgias-Scholion — ganz allgemein in die Anzahlen selbst die Unterscheidung eines unveränderlich-noetischen und eines veränderlichen Bestandteils zu verlegen. Was er den „Stoff" (die ὕλη) der Anzahlen nennt, ist offenbar gar nicht an die sinnlich wahrnehmbaren Dinge gebunden, sondern mit dem Wieviel, das die jeweilige Anzahl angibt, identisch. Nur dieses Wieviel wird von der Rechnung betroffen, ganz unabhängig davon, daß es sich um die Berechnung von sinnlich wahrnehmbaren Dingen handeln mag. In der Anzahl „Sechs" z. B. ist von ihrem εἶδος, nämlich dem ἀρτιοπέριττον (dem „Geradungeraden" — weil Sechs sich aus der geraden Zwei und der ungeraden Drei als Fak-

[1]) Vgl. auch Proklus: (ἡ ἀριθμητική) τὰ εἴδη τοῦ ἀριθμοῦ καθ' αὑτὰ σκοπεῖ (Friedlein 39, 17); ferner das Scholion zu Gorg. 451 A (Hermann VI, 300): ἐπίστησον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ κατὰ τὴν ἑαυτῆς φύσιν τὰ εἴδη τοῦ ἀριθμοῦ σκοπεῖ, τὰ δὲ σχήματα τὰ ἐπ' αὐτοῖς καὶ τοὺς λόγους ὡς ἀρχὴν γεωμετρίας καὶ μουσικῆς . . . (vgl. S. 40 u. 51).

toren zusammensetzt[1]) —), die Menge „sechs“ als ihr Wieviel, ihre ὕλη zu unterscheiden. Mit dem Eidos hat es die Arithmetik, mit der Menge der „hylischen“ Monaden die Logistik zu tun. Wie verhält sich nun diese Auffassung vom Gegenstande der Logistik zu dessen Einbeziehung in den Bereich der αἰσθητά? Ist die von der jeweiligen Anzahl angegebene Menge der „hylischen“ Monaden doch eben immer auf sinnlich wahrnehmbare Dinge bezogen? Diese Fragen verweisen unmittelbar auf die platonischen Bestimmungen selbst, deren genaue Interpretation sich ja die neuplatonischen Exegeten angelegen sein lassen. Es mag sein, daß Olympiodor in mathematischer Hinsicht zu wenig sachkundig ist, um dieser Aufgabe gerecht zu werden, wie ja seine Meinung, es handle sich in dem einen Falle um die Multiplikation von geraden bzw. ungeraden Anzahlen untereinander, im anderen dagegen von geraden mit ungeraden und umgekehrt, offensichtlich nicht haltbar ist[2]). Aber ihren tieferen Grund hat jene Unklarheit doch wohl in gewissen Schwierigkeiten der bei Plato selbst zutage tretenden Auffassung.

## § 3.
## Logistik und Arithmetik bei Plato.

Im Gorgias (451 A—C) meint Sokrates, auf die Frage, womit (περὶ τί) es die Arithmetik zu tun habe, würde er die Antwort geben: ὅτι τῶν περὶ τὸ ἄρτιόν τε καὶ περιττὸν [γνῶσις], ὅσα ἂν ἑκάτερα τυγχάνῃ ὄντα: „daß sie zu den Wissensgebieten gehört, die das Gerade und das Ungerade betreffen, und zwar im Hinblick darauf, wieviel das Gerade und das Ungerade jeweils beträgt.“ Und von der Logistik heißt es dann weiter: περὶ τὸ αὐτὸ γάρ ἐστι, τό τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν· διαφέρει δὲ τοσοῦτον, ὅτι καὶ πρὸς αὑτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα πῶς ἔχει πλήθους ἐπισκοπεῖ τὸ περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον ἡ λογιστική: „sie befaßt sich mit dem gleichen, nämlich mit dem Geraden und dem Ungeraden, die Logistik unterscheidet sich aber [von der Arithmetik] insofern, als sie das Gerade und das Ungerade daraufhin betrachtet, wie es mit ihnen in bezug auf die Menge [die sie jeweils umfassen] — [das einzelne Gerade oder Ungerade] sowohl für sich genommen als auch in Beziehung zueinander gesetzt — steht.“ Diese merkwürdig umständliche Definition — vor allem ist in ihr sorgfältig das Wort ἀριθμός vermieden[3]) — stimmt wörtlich mit der im Charmides (165 E—166 A, B) gegebenen überein: ἡ λογιστική ἐστί που τοῦ ἀρτίου καὶ τοῦ περιττοῦ, πλήθους ὅπως ἔχει πρὸς αὑτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα —

[1]) Vgl. Nikomachos 19, 9 ff. (Hoche).

[2]) Es ist auch kaum wahrscheinlich, daß Olympiodor hierbei an Euklid IX, 21—23 und 28—29 denkt.

[3]) Vgl. Staat 525 A: Ἀλλὰ μὴν λογιστική τε καὶ ἀριθμητικὴ περὶ ἀριθμὸν πᾶσα. Auch Gorg. 453 E 2 f.

ein Beweis dafür, daß es sich hier nicht etwa um eine „zufällige“ Aussage handelt[1]). Von der Arithmetik heißt es dann noch einmal im Gorgias (453 E), sie lehre „vom Geraden und Ungeraden, wieviel es [jeweils] sei“: περὶ τὸ ἄρτιόν τε καὶ τὸ περιττὸν ὅσον ἐστίν.

Man pflegt in diesen Sätzen, die in gleicher Weise sowohl dem Charmides-Scholion als auch dem Kommentar Olympiodors und dem Gorgias-Scholion zugrunde liegen, die Arithmetik als theoretische Disziplin unmittelbar der Logistik als praktischer Rechenkunst gegenübergestellt zu finden[2]), indem man sich eben auf die Ausführungen bei Proklus und im Charmides-Scholion verläßt. Es ist aber nicht recht einzusehen, inwiefern die Worte Platos gerade diesen Gegensatz bezeichnen sollen. Läßt sich denn die ἀριθμητική, von der hier die Rede ist, ohne weiteres als „Zahlentheorie“ verstehen? Ist überhaupt der Begriff des ἀριθμός mit unserem — noch dazu meist sehr unbestimmt gebrauchten — Begriff der „Zahl“ identisch?

Um den ursprünglichen platonischen Bestimmungen gerecht zu werden, dürfen wir vor allem nicht den Zusammenhang aus den Augen verlieren, der für die Fragestellung und die Gesprächsführung der platonischen Dialoge maßgebend ist und den die neuplatonische Systematik nur allzuleicht zu verdecken geneigt ist. Es handelt sich ja hier, bei der platonischen Gegenüberstellung von Arithmetik und Logistik, zunächst keineswegs um Wissensgebiete, die zwei verschiedenen Ebenen angehören. Vielmehr ist in beiden Fällen ein „Wissen“ gemeint, das wir im Umgang mit den Dingen des täglichen Lebens erwerben und in dem wir es dann auch zu einer besonderen Sachkunde bringen können. Dieses Wissen läßt sich nun freilich nach zwei verschiedenen Richtungen auseinanderlegen. Wir pflegen 1. angesichts bestimmter Mengen von Dingen, mit denen wir es zu tun haben, deren genaue Anzahl zu bestimmen, d. h. diese Dinge zu „zählen“ — was namentlich bei größeren Mengen eben eine gewisse Vertrautheit mit den Anzahlen überhaupt voraussetzt. Um zählen zu können, müssen wir die einzelnen Anzahlen kennen und auseinanderhalten, müssen wir τὸ ἕν τε καὶ τὰ δύο καὶ τὰ τρία διαγιγνώσκειν (Staat VII, 522 C)[3]). Der Inbegriff dieses Wissens um alle möglichen Anzahlen wird von Plato „Anzahlenkunde“, „Arithmetik“, genannt. — Wir pflegen aber auch 2. jene Mengen zu vervielfältigen oder aufzuteilen, und

---

[1]) Vgl. auch Epinomis 978 E—979 A.

[2]) Es möge genügen, Nesselmann, Die Algebra der Griechen, 1842, S. 40, M. Cantor, Vorl. über Gesch. d. Mathem. I³, S. 157, Hultsch, Pauly-Wissowa v. „Arithmetica“ § 2 (S. 1067), Heath, A history of greek mathematics I, 1921, S. 13f. zu nennen. Ausnahmen: Ruska, aaO., S. 93, und Heidel, Πέρας and Ἄπειρον in the pythagorean philosophy, Arch. f. Gesch. d. Philos. XIV, 1901, S. 398, Anm. 44.

[3]) Vgl. Gesetze 818 C.

das bedeutet, daß wir uns nicht mit der abgezählten Anzahl der jeweiligen Dinge begnügen, sondern an diese Anzahl mit anderen „Anzahlen“ herantreten, sei es, daß wir den „dritten“ Teil der betreffenden Menge absondern oder eine Menge, die das „vier“fache der vorgegebenen beträgt, herstellen wollen. Bei solchen Vervielfältigungen und Aufteilungen, oder allgemeiner: bei allen Rechnungen, die wir mit den Mengen anstellen, müssen wir bereits wissen, wie sich die verschiedenen Anzahlen zueinander verhalten und wie sie in sich selbst beschaffen sind, d. h. in welcher Weise jede von ihnen wiederum aus verschiedenen Anzahlen zusammengesetzt ist. Der Inbegriff dieses Wissens, das also das Verhalten der Anzahlen zueinander, ihre gegenseitigen Beziehungen betrifft und so erst das In-Beziehung-Setzen der Anzahlen, das Rechnen mit ihnen ermöglicht, heißt „Rechenkunde“ — Logistik.

Die „Arithmetik“ ist demnach nicht „Zahlentheorie“, sondern zunächst und vor allem die Kunst des richtigen Zählens. So heißt es auch im Theaetet (198 A, B) von der ἀριθμητική ausdrücklich: ταύτῃ δή, οἶμαι, τῇ τέχνῃ αὐτός τε ὑποχειρίους τὰς ἐπιστήμας τῶν ἀριθμῶν ἔχει καὶ ἄλλῳ παραδίδωσιν ὁ παραδιδούς: „durch diese Wissenschaft, denk' ich, hat man selbst die Kenntnis der Anzahlen in der Hand und vermag sie auch als Lehrender einem anderen zu vermitteln.“ Kennt man sich ganz in dieser Kunst aus (ἀριθμητικὸς ὢν τελέως), so kennt man auch alle Anzahlen (πάντας ἀριθμοὺς ἐπίσταται)[1]. Erst von dieser Kunst des Zählens aus lassen sich weitere Einsichten auf dem Gebiete der Anzahlen gewinnen. Auch die Logistik ist nur auf dieser Grundlage möglich. — Die „Logistik“ ihrerseits ist nicht bloß Rechenkunst in dem Sinne, daß sie die für das „Operieren“ mit Anzahlen nötigen Anweisungen gibt, etwa über das beim Multiplizieren, Dividieren, Radizieren und bei der Lösung eingekleideter Aufgaben einzuschlagende Verfahren belehrt. Alles sinnvolle Operieren mit Anzahlen setzt bereits ein Wissen um die Beziehungen, die die einzelnen Anzahlen miteinander verknüpfen, voraus. Dieses Wissen, das wir in der Kindheit erwerben und das wir dann bei jeder einzelnen Berechnung anwenden, ohne daß es uns in seiner Gesamtheit ständig präsent wäre, macht in erster Linie die λογιστική aus. Daß sich aus diesem Wissen die Möglichkeit von Rechenoperationen ableiten läßt und sich dafür wiederum bestimmte „mechanische“ Regeln ergeben, hat eine — namentlich für unser praktisches Verhalten — nicht geringe, aber eben doch nur untergeordnete Bedeutung. Wir können freilich dieses Wissen am besten in der Weise erwerben, daß wir uns an Hand von zählbaren Dingen mit den elementaren Rechenoperationen vertraut machen. Daher fordert Plato an jener Stelle der Gesetze (819 B, C), die von den neu-

[1]) Vgl. auch Jon 537 E: . . . ὅτι πέντε εἰσὶν οὗτοι οἱ δάκτυλοι . . . τῇ αὐτῇ τέχνῃ γιγνώσκομεν τῇ ἀριθμητικῇ . . .

platonischen Kommentaren herangezogen wird, einen (nach ägyptischem Vorbild) im Spiel zu erteilenden Rechenunterricht, bei dem die Kinder sich das richtige Zählen und Verknüpfen von Anzahlen mühelos aneignen können. Was auf diese Weise vor allem erlernt werden soll, sind eben die mannigfaltigen Beziehungen, die zwischen den verschiedenen Anzahlen bestehen: daß etwa die Verfünffachung einer Menge von zwanzig Kränzen hundert Kränze ergibt, daß eine Menge von zweihunderteinundzwanzig Äpfeln nur in siebzehn oder dreizehn gleiche Teile geteilt werden kann usf.

Aus dem Gesagten ergibt sich, daß das „arithmetische" und das „logistische" Wissen auf dieser ursprünglichen Stufe — und, wie wir sehen werden, gilt das nicht bloß für diese — sich nur schwer auseinanderhalten lassen. So ist die einfachste Beziehung zwischen den Teilen einer Menge und dieser Menge selbst (als ihrer Summe) unmittelbar durch das Zusammenzählen, also durch das über alle Glieder aller Teilmengen sich erstreckende Zählen gegeben (vgl. Theaetet 195 E—196 A und 198 A—C, wo es sich um das Zusammenzählen von fünf und sieben handelt und dieses Geschäft der ἀριθμητική zugewiesen wird, und 204 B, C). Addition und ebenso Subtraktion stellen nur ein erweitertes Zählen dar. Ferner lassen sich auch alle übrigen Beziehungen zwischen den Anzahlen, die den komplizierteren Rechenoperationen zugrunde liegen, letztlich auf die im Zählen feststellbare Ordnung der Anzahlen zurückführen. Andererseits setzt das Zählen selbst bereits ein fortschreitendes Aufeinander-Beziehen und Voneinander-Unterscheiden sowohl der gezählten Dinge als auch der Anzahlen voraus. So kommt es, daß im Sprachgebrauch Platos „Zählen" und „Rechnen" häufig zusammengespannt werden: Staat VII, 522 E: λογίζεσθαί τε καὶ ἀριθμεῖν, 525 A: λογιστική τε καὶ ἀριθμητική, 522 C: ἀριθμόν τε καὶ λογισμόν (womit hier der Zusammenhang, auf den das τὸ ἕν τε καὶ τὰ δύο καὶ τὰ τρία διαγιγνώσκειν hinweist, kurz bezeichnet wird — vgl. S. 30), Phaidr. 274 C: ἀριθμόν τε καὶ λογισμόν, Kl. Hipp. 367 A: περὶ λογισμὸν καὶ ἀριθμόν. In den Gesetzen (817 E) werden die λογισμοί und τὰ περὶ ἀριθμούς ausdrücklich als ἓν μάθημα bezeichnet[1]). Aber dennoch macht die fundamentale Bedeutung des Zählens die Hervorhebung und relative Isolierung der ἀριθμητική als solcher notwendig. Ist doch für Plato das dem Menschen eigene Vermögen, zählen zu können — ein Vermögen, dem das Zählbarsein der Dinge dieser Welt entspricht —, weit über alle Spezialprobleme hinaus ein grundlegendes, den systematischen Aufbau seiner Lehre bestimmendes Faktum[2]).

---

[1]) Vgl. auch Archytas, Diels I³, S. 337, fr. 4, wo von „Logistik" offenbar in einem Arithmetik und Logistik umspannenden Sinne die Rede ist.

[2]) Vgl. [Aristot.], Problem. Λ 6, 956 a 11 ff., die Plato zugeschriebene Äußerung, der Vorrang des Menschen vor den übrigen Lebewesen bestehe darin, ὅτι ἀριθμεῖν μόνον ἐπίσταται τῶν ἄλλων ζῴων. (Vgl. auch Gesetze 818 C.)

Mit alledem ist für das Verständnis der im Gorgias bzw. Charmides gegebenen Definitionen nur soviel gewonnen, daß wir von der Art des Wissens, wie es in der „Arithmetik“ und in der „Logistik“ vorliegt, unmittelbar auf deren Verschiedenheit und gleichzeitige Zusammengehörigkeit schließen können. Diese Zusammengehörigkeit wurzelt zuletzt im Gegenstand, mit dem es beide zu tun haben. Beiden geht es um die „Anzahlen“, um die „Anzahl“ überhaupt — den ἀριθμός (vgl. Staat 525 A). Was bedeutet es nun aber, daß in den Definitionen vom Geraden und Ungeraden und nicht von der Anzahl die Rede ist? Wenn hier die — auf Erwägungen ganz anderer Art beruhende — Definitionstechnik durchaus vertraute Sachverhalte in präziser Weise zu formulieren sucht und demzufolge im „Geraden“ und „Ungeraden“ die dem Gegenstand der Arithmetik und Logistik eigentlich angemessene Bezeichnung erblickt[1], so ist es klar, daß wir Aufschluß hierüber erst aus der Analyse der Bedeutung von ἀριθμός gewinnen können. Doch müssen wir vorerst noch die auf die Ausgestaltung des „arithmetischen“ und „logistischen“ Wissens bezüglichen Bestimmungen Platos verfolgen.

So wie wir bisher die Arithmetik und die Logistik betrachtet haben, stellen sie ein bloß „praktisches“ Wissen dar: es handelte sich um ein Wissen, das wir im Hinblick auf die Notwendigkeiten des Lebens erwerben und handhaben müssen (vgl. insbesondere Gesetze 819 C). Das Absehen von solchen Zwecken erhebt sie bereits zu einer ganz anderen Würde. In eins damit bekommen wir den Blick für bestimmte Eigentümlichkeiten jenes Wissens frei, das nun zum eigentlichen Wissen, zur ἐπιστήμη wird. So stellt Plato im Staat und im Philebos der „praktischen“ Arithmetik und der „praktischen“ Logistik die entsprechenden „theoretischen“ Disziplinen entgegen. Im Philebos (56 D) fragt Sokrates: Ἀριθμητικὴν πρῶτον ἆρ' οὐκ ἄλλην μέν τινα τὴν τῶν πολλῶν φατέον, ἄλλην δ' αὖ τὴν τῶν φιλοσοφούντων; „ist nicht zuerst zu sagen, daß ein anderes die Arithmetik ist, wie sie gemeinhin von den vielen betrieben wird, und ein anderes, wie sie von den Wahrheitssuchenden betrieben wird?“ Und auf die Frage seines Mitunterredners Protarchos, welcher Unterschied denn hier bestehe, antwortet er (56 D, E): οὐ σμικρὸς ὅρος, ὦ Πρώταρχε· οἱ μὲν γάρ που μονάδας ἀνίσους καταριθμοῦνται τῶν περὶ ἀριθμόν, οἷον στρατόπεδα δύο καὶ βοῦς δύο καὶ δύο τὰ σμικρότατα ἢ καὶ τὰ πάντων μέγιστα· οἱ δ' οὐκ ἄν ποτε αὐτοῖς συνακολουθήσειαν, εἰ μὴ μονάδα μονάδος ἑκάστης τῶν μυρίων μηδεμίαν ἄλλην ἄλλης διαφέρουσάν τις θήσει: „es ist keine geringe Scheidung, Protarchos: von denen, die es mit der Anzahl zu tun haben, zählen die einen irgendwelche ungleiche Einheiten ab,

[1] Vgl. auch Theaetet 198 A: die ἀριθμητική als θήρα ἐπιστημῶν ἀρτίου τε καὶ περιττοῦ παντός (dazu Euthyd. 290 C); Protag. 357 A; Epinomis 981 C, 990 C; ferner Gesetze 818 C.

z. B. zwei Heerlager, zwei Rinder, zwei kleinste Gegenstände oder auch zwei von den allergrößten; die anderen dagegen würden ihnen hierin wohl nicht folgen, es sei denn, daß man Einheiten setzte, von denen jede sich in gar keiner Weise von all den unübersehbar vielen anderen unterscheidet." Und Protarchos betont noch einmal mit Nachdruck: καὶ μάλα γ' εὖ λέγεις οὐ σμικρὰν διαφορὰν τῶν περὶ ἀριθμὸν τευταζόντων, ὥστε λόγον ἔχειν δύο αὐτὰς εἶναι: „sehr richtig sagst Du, daß kein geringer Unterschied bei denen anzutreffen ist, die sich mit der Anzahl befassen, so daß die Rede zu Recht besteht, es seien ihrer [der Arithmetiken] zwei." Dieser Unterschied wird nun im unmittelbar folgenden u. a. auch auf die Logistik ausgedehnt, womit also Plato hier ausdrücklich eine „theoretische" Logistik postuliert. Was diese theoretische Logistik demnach von der praktischen jedenfalls unterscheidet, ist die Art der Mengen, mit denen es beide zu tun haben: in dem einen Falle handelt es sich um Mengen von „ungleichen" Gegenständen — und das sind offensichtlich alle sinnlich wahrnehmbaren Dinge —, in dem anderen um Mengen von völlig gleichartigen Einheiten, wie sie eben im Bereich der sinnlich wahrnehmbaren Dinge gar nicht vorkommen können. Wie weit die Konsequenzen, die sich aus dieser Unterscheidung ergeben, mit dieser Unterscheidung selbst verträglich sind, werden wir noch zu betrachten haben. So viel ist aber jetzt schon klar, daß die theoretische Logistik jenes Wissen um die Beziehungen zwischen den Anzahlen, das allem Rechnen — meist unausdrücklich — vorangeht und vorangehen muß, zum ausdrücklichen Wissen erhebt. Erst damit macht sie von ihm den richtigen Gebrauch (vgl. Staat 523 A). Indem die Hinsicht wegfällt, die dieses Wissen an die Gegenstände der Sinne band, zeigt sich zugleich, daß es keinem speziellen Gegenstandsbereich der sinnlich wahrnehmbaren Welt angehören und nur auf einen „indifferenten" Stoff, nämlich die gleichartigen Monaden bezogen sein kann. So wächst die theoretische Logistik unmittelbar aus der praktischen hervor, indem diese ihre Richtung auf das praktische Leben vernachlässigt und ihren eigenen Voraussetzungen, um ihrer selbst willen, nachgeht.

In eben diesem Sinne ist auch im Staat (525 C, D) von der Logistik die Rede, die nicht zu Privatzwecken zu treiben ist, wie es die Kaufleute und Krämer tun (μὴ ἰδιωτικῶς, . . . οὐχ ὠνῆς οὐδὲ πράσεως χάριν ὡς ἐμπόρους ἢ καπήλους μελετῶντας), sondern um eines öffentlichen Interesses[1]), vor allem aber um der Erkenntnis selbst willen (τοῦ γνωρίζειν ἕνεκα). Durch sie werde die Seele dahin gebracht, die Natur der Anzahlen, wie sie in sich selbst sind — und also nicht wie sie im Hinblick auf irgendwelche Gegenstände der Sinne erfaßt werden —, mit dem

---

[1]) Z. B. Staat VIII, 546 A ff. — Vgl. Gesetze V, 746 E ff.

Verstande allein (τῇ νοήσει αὐτῇ) zu ergreifen. Sie habe es nicht mit Anzahlen zu tun, die „sichtbare oder tastbare Körper haben" (ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας — vgl. Epinomis 990 C), sondern eben mit den Anzahlen „selbst" (περὶ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν). Von einem anderen gedanklichen Zusammenhang aus kommt im Theaetet (195 D—196 B) der gleiche Gegensatz zur Sprache: beim Zusammenzählen einer Anzahl von Dingen, die man sieht oder tastet oder sonstwie mit den Sinnen wahrnimmt, z. B. einer Menge von fünf und einer Menge von sieben Menschen, kann man sich leichter irren, als wenn man die entsprechende Anzahl „selbst", in unserem Fall also die Fünf selbst und die Sieben selbst (αὐτὰ πέντε καὶ ἑπτά), die man nur „im Verstande hat" (ἐν τῇ διανοίᾳ ἔχει), betrachtet, obgleich auch hier ein Irrtum — namentlich bei einer größeren Anzahl — keineswegs ausgeschlossen ist. Bei diesen Anzahlen und ebenso bei der Elf, „die man gar nicht anders als mit dem Verstande allein wahrnimmt" (τὰ ἕνδεκα, ἃ μηδὲν ἄλλο ἢ διανοεῖταί τις), wie auch bei jeder anderen Anzahl der gleichen Art — „denn ich denke, du meinst alle Anzahl schlechthin" (οἶμαι γάρ σε περὶ παντὸς [μᾶλλον] ἀριθμοῦ λέγειν), sagt Theaetet zu Sokrates und findet mit dieser Annahme dessen Zustimmung — handelt es sich eben um Anzahlen von „reinen", d. h. nur dem Verstande zugänglichen, Einsen, die man daher auch nur „bei sich selbst" (αὐτὸς πρὸς αὑτόν) gewahren und zählen kann, im Unterschied zu „irgend etwas von dem, was außerhalb von uns Anzahl aufweist" (ἄλλο τι τῶν ἔξω ὅσα ἔχει ἀριθμόν — 198 C). Daß diese Anzahlen nur vom Verstand wahrzunehmen sind (ὧν διανοηθῆναι μόνον ἐγχωρεῖ — Staat 526 A), ist allein in der „Reinheit" jener Einsen begründet, von denen „jede allen anderen gleich, von allen anderen nicht im geringsten verschieden ist und andererseits in sich selbst keinerlei Teile aufweist" (ἴσον τε ἕκαστον πᾶν παντὶ καὶ οὐδὲ σμικρὸν διαφέρον, μόριόν τε ἔχον ἐν ἑαυτῷ οὐδέν — ebda.). Von dieser letzten Eigenschaft der „reinen" Einsen, von ihrer Unteilbarkeit, wird noch zu sprechen sein. Wir wollen aber zunächst versuchen, uns ein Bild von der theoretischen Logistik zu machen, wie es Plato vorgeschwebt haben mag.

Hierbei ist durchaus an den im Gorgias und im Charmides gegebenen Definitionen der Arithmetik und der Logistik festzuhalten. Denn deren Inhalt ist zwar unabhängig von dem praktischen bzw. theoretischen Charakter beider Disziplinen, kann aber erst von der in theoretischer Haltung gewonnenen Einsicht aus völlig verstanden werden. Gerade der Umstand, daß hier eine im eigentlichen Sinne „wissenschaftliche" Definition einen Stoff betrifft, der gemeinhin nur in praktischer Absicht beachtet wird, bedingt die merkwürdige Zugespitztheit der Formulierung. — Die theoretische Logistik müßte danach zunächst einmal das Wissen um alle zwischen den „reinen" Anzahlen bestehenden Verhältnisse (λόγοι) um-

fassen, auf denen das Gelingen jeglicher Rechnung beruht, während der theoretischen Arithmetik das Wissen um diese „reinen" Anzahlen selbst vorbehalten bliebe. Es lassen sich vielleicht einige Anzeichen dafür aus den späteren mathematischen Lehrbüchern der Neuplatoniker entnehmen, die hinsichtlich des in ihnen verarbeiteten Wissensstoffes unzweifelhaft auf die platonische und vorplatonische Zeit zurückgehen, mögen die Anordnung dieses Stoffes, die Nomenklatur und die allgemeine Darstellungsweise noch so große Änderungen erfahren haben.

§ 4.

## Die Stellung der Verhältnislehre bei Nikomachos, Theon und Domninos.

In der Introductio arithmetica des Nikomachos wird das zu untersuchende Gebiet des ποσόν in zwei Teile geteilt (I, 3 — Hoche 5, 13ff.): τοῦ ποσοῦ τὸ μὲν ὁρᾶται καθ' ἑαυτό, μηδεμίαν πρὸς ἄλλο σχέσιν ἔχον: „an dem Wieviel wird das eine an ihm selbst betrachtet, das nämlich, was keinerlei Verhältnis zu anderem hat", τὸ δὲ πρὸς ἄλλο πως ἤδη ἔχον καὶ σὺν τῇ πρὸς ἕτερον σχέσει ἐπινοούμενον: „ein zweites dagegen als bereits in irgendeinem Verhältnis zu anderem stehend und gedanklich [überhaupt nur] zusammen mit dem Verhältnis zu anderem erfaßbar." Von der überlieferten „pythagoreischen" Einteilung der mathematischen Wissenschaften in Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie[1]) ausgehend, ordnet nun Nikomachos dem Bereich des καθ' αὑτό die Arithmetik, dem Bereich des πρὸς ἄλλο die Musik zu (6, 1—3). Trotzdem ist ein großer Teil seiner beiden „arithmetischen" Bücher gerade der Untersuchung dieses zweiten Bereichs des ποσόν gewidmet. In den Kapiteln 7—13 des ersten Buches werden zuerst die beiden Grundarten (die πρώτιστα εἴδη) der von der Wissenschaft betrachteten Anzahl (des ἐπιστημονικὸς ἀριθμός) untersucht, nämlich das Ungerade und das Gerade, von denen es heißt, daß ihnen das Sein des Quantitativen als solchen zukomme (οὐσίαν ἔχοντα τὴν τῆς ποσότητος — vgl. 12, 20 bis 13, 2). Dann folgen deren Unterarten, wie das Geradgerade, das Ungeradgerade usf., wobei Nikomachos — im Gegensatz zu Euklid, Theon und Domninos — hier durchaus schematisch verfährt und die Unterscheidungen offensichtlich zu weit treibt. Hervorzuheben ist, daß auf diese Weise auch die Anzahlen, die zueinander prim sind, unter eine besondere Art (nämlich die dritte Unterart des Ungeraden) subsumiert werden (τὸ πρὸς ἄλλο πρῶτον καὶ ἀσύνθετον — 28, 20ff.), während es sich nach Nikomachos' eigener Bestimmung hier nur um den Bereich des καθ' αὑτό handeln soll[2]). Es folgen (Kapitel 14—16) die „vollkommenen", die „übermäßigen" und die „mangelhaften" Anzahlen, die durch das Verhältnis zwischen

[1]) Vgl. Archytas, Diels I³, S. 331, fr. 1.
[2]) Darauf hat bereits Nesselmann, aaO., S. 195, hingewiesen.

der Summe und dem Produkt ihrer aliquoten Teile bestimmt sind, bei denen es sich also — allgemeiner gesagt — darum handelt, in welcher Weise sie selbst aus verschiedenen Anzahlen zusammengesetzt erscheinen. Alsdann heißt es (44, 8f.): προτετεχνολογημένου δὲ ἡμῖν περὶ τοῦ καθ' αὑτὸ ποσοῦ νῦν μετερχόμεθα καὶ ἐπὶ τὸ πρός τι: „nachdem wir die nötigen Vorkenntnisse in bezug auf das Wieviel an ihm selbst gegeben haben, wenden wir uns nun dem verhältnismäßigen zu." Demgemäß werden in den Kapiteln 17—23 die „zehn arithmetischen Verhältnisse" (αἱ δέκα ἀριθμητικαὶ σχέσεις — 64, 21) dargestellt. Sie treten als Arten der „Ungleichheit" (als εἴδη der ἀνισότης) auf und werden dann noch in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit und ihrer Beziehung zur „Gleichheit" bis zum 5. Kap. des zweiten Buches verfolgt. Sie sind in zwei Gruppen von je fünf Arten zusammengefaßt, denen z. B. folgende Fälle entsprechen: Vier zu Drei, Fünf zu Drei, Sechs zu Drei, Sieben zu Drei, Acht zu Drei und umgekehrt. Ihre unmittelbarste Anwendung finden diese Verhältnisarten in der Tat auf dem Gebiete der Musik, doch darf andererseits nicht vergessen werden, daß sie zu den theoretischen Fundamenten jeglicher Rechnung, insbesondere auch der Bruchrechnung gehören, worauf bereits ihre Namen bzw. die Namen der von ihnen betroffenen Anzahlen hinweisen: ἀριθμὸς ἐπιμόριος, σχέσις ἐπιμερής usf., namentlich auch die partikulären Bezeichnungen ἐπίτριτος, ἐπιπενταμερής, διπλασιεπιτέταρτος usf. — Mit dem 5. Kapitel des zweiten Buches wird zunächst die Behandlung des „verhältnismäßigen" Wieviel (τοῦ πρὸς ἕτερόν πως ἔχοντος ποσοῦ — 82, 10f.) abgebrochen und in den Kapiteln 6—20 die Lehre der figurierten Anzahlen, sowohl der ebenen wie der körperlichen, dargestellt[1]), wobei zuletzt die Reihen der Dreieckszahlen, der Quadratzahlen und der oblongen (heteromekischen) Anzahlen in Beziehung zueinander gebracht werden. Von ihrer sonstigen Bedeutung abgesehen, hat auch diese Lehre die Zusammensetzung der Anzahlen im Auge, sei es auf dem Wege der Summation, sei es auf dem der Vervielfältigung. Vom 21. Kapitel bis zum Schluß wird schließlich die Lehre von den Proportionen und Medietäten behandelt, womit wir also wiederum das Gebiet des πρός τι betreten[2]). Doch geschieht dies unter der ausdrücklichen Hervorhebung des Nutzens, den diese Lehre für die Naturkunde (worunter hier die Kosmologie des platonischen Timaios zu verstehen ist), die Musik, die Sphärik, die Geometrie und nicht zum wenigsten für das Verständnis der Alten bietet, wodurch Nikomachos zu rechtfertigen

---

[1]) Vgl. Jamblichs Kommentar zu Nikomachos, Pistelli 56, 18ff., wo diese Lehre als der ἴδιος τόπος τοῦ καθ' αὑτὸ ποσοῦ bezeichnet wird, dazu auch 35, 11ff.

[2]) Jamblich 8, 12f.: ... τὸ δὲ πρὸς ἕτερόν πως ἔχον [sc. ποσόν] (ὃ δὴ πρός τι ποσὸν ἰδίως λέγεται) ...

scheint, daß die Betrachtung der in das Gebiet des πρός τι fallenden Proportionen und Medietäten den Abschluß einer „arithmetischen Einleitung" bildet (vgl. 119, 19—120, 2 und auch 64, 21 ff.).

Theon von Smyrna verfährt insofern folgerichtiger als Nikomachos, als er — bei aller Willkür im einzelnen — darauf bedacht ist, die beiden Bereiche des ποσόν streng auseinanderzuhalten. Von einer Unterscheidung des καθ' αὑτό und des πρὸς ἄλλο ist bei ihm allerdings nicht die Rede. Doch wird der Aufbau seiner Schrift durch die Unterscheidung zwischen der Lehre von den „bloßen" Anzahlen (ἡ περὶ ψιλοὺς ἀριθμοὺς θεωρία — vgl. Plato, Politik. 299 E), d. i. der Arithmetik, und der „arithmetischen Musik" (ἡ ἐν ἀριθμοῖς μουσική) bestimmt (Hiller 17, 12 f.), welche Unterscheidung ja von Nikomachos mit jener anderen identifiziert wird und bei Theon mit ihr auch in der Tat identisch ist. Der erste, im engeren Sinn „arithmetische" Teil befaßt sich nämlich nur mit den verschiedenen Arten der für sich selbst genommenen Anzahlen, also mit dem Geraden und Ungeraden samt ihren Unterarten, den Primzahlen und den „zusammengesetzten" Anzahlen, den figurierten (ebenen und körperlichen) Anzahlen, endlich den „vollkommenen", „übermäßigen" und „mangelhaften" Anzahlen. Es läßt sich freilich auch hier nicht vermeiden, die Verhältnisse zwischen den einzelnen Anzahlen und Anzahlenarten mit zu berücksichtigen, so z. B. in der Darstellung der Anzahlenreihe (22, 19 ff.) und der Beziehungen zwischen den τετράγωνοι und den ἑτερομήκεις (28 ff.). Aber die ausführliche Besprechung dieser Verhältnisse — sowohl der zehn λόγοι als auch der ἀναλογίαι und μεσότητες — ist eben ganz dem zweiten, „musikalischen" Teil vorbehalten. Sie erfolgt hier im engsten Zusammenhang mit der Darstellung der Lehre von den musikalischen Intervallen, aber auch in deutlicher Abhebung von derselben. Die Lehre von den musikalischen Intervallen gliedert sich selbst in zwei Teile (46 f.): der eine betrifft die mit den Sinnen wahrnehmbare instrumentale Harmonie (ἡ ἐν ὀργάνοις αἰσθητὴ ἁρμονία), der andere die mit dem Verstand wahrnehmbare „arithmetische" Harmonie (ἡ ἐν ἀριθμοῖς νοητὴ ἁρμονία), welche jene erste überhaupt erst begründet. Von den Verhältnissen der „arithmetischen" Harmonik sind nun wiederum die von der Arithmetik als solcher behandelten Verhältnisse zu unterscheiden, und zwar bereits darum, weil jene nur Spezialfälle dieser letzten darstellen (vgl. 75, 17 ff.). So erörtert Theon (76—81) — unter Berufung auf Adrast — die zehn Verhältnisarten „gemäß der arithmetischen Lehre" (κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν παράδοσιν — 76, 1 ff.), das heißt eben: nicht nur als Lehrgegenstand der arithmetischen Harmonik, nachdem er diese — unter Voranschickung einiger allgemeiner Darlegungen (72—74) — kurz (74 f.) gestreift, die „aisthetische" Harmonik dagegen vorher ausführlich (47—72) behandelt hat. Ebenso kommen die Proportionen und

Medietäten, die sowohl „an Anzahlen" als auch „anders" (ἐν ἀριθμοῖς καὶ ἄλλως — 85, 16) betrachtet werden können, zuerst (85—93) im Zusammenhang mit der „Einteilung des Kanons" (nach Thrasyllos) zur Erörterung — womit sich zwanglos die Darstellung der „pythagoreischen" Tetraktys- bzw. Dekadenlehre verbindet (95—106; vgl. 87, 4 ff.)[1] —, um schließlich in sehr verallgemeinerter Form[2] — wiederum nach Adrast (und Eratosthenes[3]) — als rein mathematischer Lehrgegenstand vorgetragen zu werden (106—119). — Es besteht also auch hier, bei Theon, wie bei Nikomachos, eine gewisse Spannung zwischen der faktischen Ausdehnung des arithmetischen Wissens und der Auffassung der Arithmetik als einer Wissenschaft, die auf die Betrachtung der für sich selbst genommenen und nicht in Beziehung zueinander gesetzten Anzahlen beschränkt sein soll. Diese Spannung wird bei Theon besonders in dem einleitenden Teil seines Werkes deutlich, wo er über die Einteilung und die Reihenfolge der mathematischen Wissenschaften spricht (16f.). „Innerhalb der natürlichen Ordnung" (πρὸς τὴν φυσικὴν τάξιν), heißt es da, „käme die Musik erst an fünfter Stelle, nämlich hinter der Arithmetik, der Geometrie, der Stereometrie und der Astronomie". (Es ist die von Plato im 7. Buch des Staates im Hinblick auf die Erziehung der künftigen Staatsführer entworfene Ordnung der Wissenschaften.) „Innerhalb unserer Betrachtung möge die arithmetische Musik gleich auf die Arithmetik folgen" (πρὸς τὴν ἡμετέραν θεωρίαν μετ' ἀριθμητικὴν τετάχθω ἡ ἐν ἀριθμοῖς μουσική), da ja ohne sie (ἄνευ τῆς ἐξαριθμουμένης καὶ νοουμένης μουσικῆς) die kosmische Harmonie (ἡ ἐν κόσμῳ ἁρμονία καὶ ἐν τούτῳ μουσική) nicht erfaßt werden könne, auf die es allein ankomme, während „wir der instrumentalen Musik nicht unbedingt bedürfen" (τῆς . . . ἐν ὀργάνοις [sc. μουσικῆς] οὐ παντάπασι προσδεόμεθα). So wird von Theon unter Berufung auf Plato, Staat VII, 530 D—531 C, aber auch um der „Bequemlichkeit" der Betrachtung willen (πρὸς τὴν τῆς ἡμετέρας θεωρίας εὐμάρειαν[4]) die „arithmetische Musik" mit der Arithmetik „zusammengespannt" (συνέζευκται), an die fünfte Stelle dagegen die „kosmische" Musik verwiesen. In der Tat kommt Theon erst am Schluß des dritten, astronomischen Teils seines Werkes auf die kosmische Musik zurück. Aber er ist — wie wir gesehen haben — weit davon entfernt, die Lehre von der aisthetischen Harmonie zu vernachlässigen, von der aus, wie er

[1]) Tannery (Mém. scient. III, 27) glaubt allerdings, daß hier eine spätere Interpolation vorliegt, deren Quelle er in den — heute verschollenen — Theologumena des Nikomachos erblickt.

[2]) die aber wahrscheinlich auf spätere, byzantinische Einschübe zurückzuführen ist — s. Tannery, aaO., II, 459f.

[3]) Vgl. Pappus, Hultsch II, 636, 24f.

[4]) Vgl. eine ähnliche Berufung auf die εὐμάρεια bei Jamblich, Pistelli 35, 16 ff.

selbst meint, die noetische leichter zugänglich ist (. . . ἡ δὲ νοητὴ ῥᾷον ἀπὸ τῆς αἰσθητῆς κατανοεῖται — 47, 5f.). Andererseits tritt bei ihm — wie wir ebenfalls gesehen haben — die arithmetische Harmonik ganz hinter die rein arithmetische Verhältnislehre zurück. Bei der Strenge griechischer Wissenschaftssystematik können alle diese Unstimmigkeiten nicht einfach der Unzulänglichkeit Theons — bzw. des Nikomachos — zugeschrieben werden. Es fällt hier gewiß entscheidend ins Gewicht, daß die Verhältnislehre ihre erste Ausbildung gerade der Untersuchung musikalischer Intervalle zu verdanken haben mag. Wenn Nikomachos und Theon diese Lehre der Musiktheorie zuweisen, so stehen sie damit — wie Tannery gelegentlich bemerkt[1]) — in einer großen, vor allem wohl auf Archytas zurückgehenden Tradition. Daß ihnen aber beiden das Festhalten an dieser Zuweisung nicht gelingt, zeigt wiederum, daß beide — mit größerer oder geringerer Inkonsequenz — jener anderen, klassischen Tradition unterliegen, die auf Euklid und Aristoxenos zurückführt und für Theon wohl im wesentlichen durch den Peripatetiker Adrast vertreten wird. Innerhalb dieser Tradition kommt der Verhältnislehre, sofern sie sich nur auf die Verhältnisse zwischen Anzahlen bezieht, kein Sonderdasein zu, wie die „arithmetischen" Bücher Euklids unmittelbar zeigen. Sie wird hier vielmehr κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν παράδοσιν (vgl. Theon 76, 1—3) überliefert[2]) und läßt sich naturgemäß auch nicht von der arithmetischen Proportionenlehre isolieren, deren Voraussetzung sie ja bildet. Die Inkohärenz in den Darstellungen bei Theon und bei Nikomachos rührt also daher, daß sie sich in ihren programmatischen Ausführungen der klassischen Tradition nicht anschließen wollen, in der Durchführung wiederum der „pythagoreischen" nicht folgen können und doch an der Einteilung des ποσόν in den Bereich des καθ' αὑτό und den des πρὸς ἄλλο festhalten zu müssen glauben. So kommt eine gewisse Heimatlosigkeit der Verhältnislehre zustande. Es läge nahe, ihr eine Stelle zuzuweisen, die derjenigen der theoretischen Logistik bei Plato entsprechen würde. So viel ist jedenfalls klar, daß ihr gerade derjenige Wissensbereich zukommt, auf den die platonische Definition der Logistik hinzuweisen scheint. Wir werden noch die Gründe zu erörtern haben, die es Theon und Nikomachos unmöglich machen, die Verhältnislehre mit der theoretischen Logistik Platos zu identifizieren. Aber trotz dieser Gründe bleibt doch die Tatsache bestehen, daß die merkwürdige Heimatlosigkeit der Ver-

---

[1]) Mém. scient. III, 70. — Für diese („pythagoreische") Tradition ist es kennzeichnend, daß sie die Anzahlen unmittelbar am Sichtbaren wahrnimmt (vgl. § 7 A), die Anzahlenverhältnisse dagegen am Hörbaren (vgl. S. 46). S. auch Proklus in Eucl. 35, 28 ff.

[2]) Vgl. auch das S. 28, Anm. 1 zitierte Gorgias-Scholion.

hältnislehre eben in die Richtung weist, von der aus die platonische Unterscheidung der Arithmetik und der Logistik erst ihren Sinn bekommt.

Was endlich das arithmetische Handbuch des Domninos[1]) (5. Jahrh.) anbelangt — der im Gegensatz zu Nikomachos und Theon bewußt die euklidische Tradition bevorzugt[2]), sich aber wie jene an den platonischen Bestimmungen orientiert (vgl. 427, 17f. und 429, 2f.) —, so ist sein ganzer innerer Aufbau ausschließlich durch zwei Unterscheidungen bestimmt. Die eine ist wiederum die des καθ' αὑτό und des πρὸς ἄλλο, die andere dagegen — wir kennen sie bereits aus Olympiodor und dem Gorgias-Scholion (s. oben S. 26f.) — die des κατ' εἶδος und des κατὰ τὸ πλῆθος. Jede Anzahl kann zunächst daraufhin betrachtet werden, unter welche Art sie für sich selbst genommen fällt, unter das Gerade, das Ungerade, das Geradungerade oder Ungeradgerade usf.: 416, 10ff.: Τῶν γὰρ ἀριθμῶν ὁστισοῦν, αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενος, κατὰ μὲν τὸ εἶδος ἢ ἄρτιος ἐστὶν ἢ περιττός, κτλ. (413–415). Sie kann aber auch im Hinblick auf die Menge der Einheiten, die ihr zugrunde liegt (κατὰ δὲ τὸ ὑποκείμενον πλῆθος τῶν ἐν αὐτῷ μονάδων . . . 416, 15f.) beurteilt werden, und zwar wiederum „für sich selbst betrachtet" (αὐτὸς καθ' ἑαυτὸν θεωρούμενος). Von dieser Menge der Einheiten heißt es an einer anderen Stelle (415, 7), sie sei das „in den Anzahlen Zugrundeliegende und gleichsam ihr Stoff" (ὑποκείμενον καὶ οἷον ὕλη . . . ἐν αὐτοῖς). Es handelt sich hier (415—416) um die dekadische Zählung nach Einern, Zehnern, Hunderten usf., wobei Domninos — gemäß den Verfahren des Apollonius — mit Tetraden (den τέσσαρες τάξεις) rechnet, die sich nach Potenzen der Myriaden ins Unendliche fortsetzen. Darüber ausführlicher zu handeln, komme aber der λογικὴ θεωρία zu (Ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων ἐπιπλέον εἰπεῖν τῆς λογικῆς ἔχεται θεωρίας — 416, 6f.)[3]). — Nachdem die Anzahlen sowohl ihrem εἶδος als auch ihrer ὕλη nach für sich selbst betrachtet worden sind, „muß man auch die sie miteinander verbindende Gemeinschaft ins Auge fassen" (δεῖ δὲ καὶ τὴν πρὸς ἀλλήλους

[1]) Anecdota Graeca, hrsg. von Boissonade (1832) IV, 413—429. Die Emendationen zum Text bei Tannery, Mém. scient. II, 213—220, und bei Hultsch, Neue Jahrb. f. Philol. u. Päd., 1897, S. 507—511.

[2]) Vgl. Tannery, aaO., 105ff. und III, 266ff.

[3]) Tannery (Mém. scient. II, S. 214) und unabhängig von ihm auch Hultsch (Neue Jahrb. f. Philol. u. Päd., 1897, S. 508; Pauly-Wissowa, v. Domninos) nehmen an, daß es τῆς λογιστικῆς . . . θεωρίας heißen müsse. Das ist vor allem darum plausibel, weil das Zähl- und Rechensystem des Apollonius, wie es uns im 2. Buch des Pappus (edit. Hultsch I, S. 2ff.) überliefert ist, wahrscheinlich in den als „logistisch" bezeichneten Büchern des Apollonius dargestellt gewesen ist (vgl. Heron, Heiberg-Schmidt V, S. 114, 11f.: Ἀπολλώνιος ἐν τῷ γ' τῶν Λογιστικῶν, dazu Pappus I, S. 20, 16: . . . ἐκ τοῦ . . . λογιστικοῦ θεωρήματος ιβ' . . . ), dagegen wohl kaum in dem von Eutokius (in Archim.

αὐτῶν ἐπισκέψασθαι κοινωνίαν — 416, 21 ff.). Der Art nach (κατ' εἶδος) gibt es in dieser Hinsicht Anzahlen, die zueinander prim, und Anzahlen, die ein gemeinsames Maß (einen oder mehrere gemeinsame Teiler) haben (416—417). Dem Stoff nach (κατὰ τὸ ὑποκείμενον, τουτέστι κατὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐν αὐτοῖς μονάδων — 417, 10—12) sind sie entweder gleich, d. h. enthalten die gleichen Mengen von Einheiten, oder sind durch die „zehn Verhältnisse" (die δέκα σχέσεις) verbunden. Hierher gehört auch jene andere, von den Alten entdeckte Betrachtungsweise, die die Anzahlen in „vollkommene", „übermäßige" und „mangelhafte" teilt (417—422). — Die Anzahlen lassen sich auch zugleich für sich selbst und in Beziehung zueinander (καθ' ἑαυτούς τε ἅμα καὶ πρὸς ἀλλήλους — 422, 6) betrachten: zwei Anzahlen sind entweder in sich selbst und zueinander prim oder in sich selbst zusammengesetzt, aber zueinander prim usf. (422). — Eine Erweiterung der Betrachtung der gegenseitigen Beziehungen zwischen den Anzahlen, und zwar ihrem Stoff nach (περί τε τὸ ὑποκείμενον αὐτοῖς πλῆθος — 423, 11), stellt dann die Proportionen- und Medietätenlehre dar, insofern hier in allen Fällen mehr als zwei Anzahlen miteinander verknüpft werden (423—425). — Es gibt endlich noch eine letzte, von den Alten eingeführte Lehre, die die Anzahlen den geometrischen Figuren angleicht, wobei Domninos — unter Berufung auf Euklid und Platon — die Forderung erhebt, die figurierten (ebenen und körperlichen) Anzahlen nur von der Vervielfältigung (und nicht auch von der Summation) her zu begreifen. Auch diese Lehre läßt sowohl den Gesichtspunkt des καθ' αὐτό als auch den des πρὸς ἄλλο zu, den ersten, solange die verschiedenen Arten der figurierten Anzahlen allein in Frage kommen, den zweiten, wenn ihre „Ähnlichkeit" in Betracht gezogen wird (425—428). — Zusammenfassend hebt Domninos noch einmal die den Aufbau der gedrängten

Heiberg III[1], S. 300, 17 = III[2], S. 258, 16 f.) genannten ὠκυτόκιον (vgl. Hultsch, Pappus III, S. 1212, und Nesselmann, aaO., S. 126; 132). Andererseits wäre der Terminus λογικὴ θεωρία doch nicht ohne weiteres mit „Logik" zu übersetzen, wie Tannery dies tut. Es mag in Erinnerung gebracht werden, was Hultsch (Pauly-Wissowa, v. Apollonius, S. 159) über das betreffende Werk des Apollonius sagt: „er (Apollonius) wies nach, daß bis zu einer Zahlenhöhe, die schon weit über menschliches Vorstellungsvermögen hinausreicht, die Zahlen durch solche griechische Wörter, die der gewöhnlichen Sprache entlehnt (nicht neu gebildet) sind, ausgedrückt werden können." Auch Archimedes wollte in seinem Ψαμμίτης zeigen, „daß man selbst die größten Zahlen auch in Worten aussprechen könne", wobei er allerdings noch einige vom allgemeinen Sprachgebrauch abweichende Ausdrücke hinzunehmen mußte. (Es kommt ihm auf die κατονόμαξις τῶν ἀριθμῶν an — vgl. Archimedes, Heiberg, II[1], 266, 10; 246, 11; 242, 17 f. = II[2], 236, 18; 220, 4; 216, 17 f.) Es darf in diesem Zusammenhange auch nicht vergessen werden, daß der mündlichen mathematischen Unterweisung, vor allem was Zählen und Rechnen betrifft, damals eine ungleich größere Bedeutung als heute zukam (vgl. Cantor, Vorl. üb. Gesch. d. Mathem. I[3], S. 157; Tannery, Mém. scient. I, S. 83 f.; ferner Nesselmann, aaO., S. 302 über die „rhetorische Algebra").

Übersicht leitende Unterscheidung hervor: „welches also die Arten der Anzahlen sind, sowohl wenn sie in sich selbst als auch wenn sie in ihrem Verhältnis zueinander und ferner wenn sie zugleich in sich selbst und in ihrem Verhältnis zueinander betrachtet werden und endlich wenn sie den geometrischen Figuren angeglichen werden, — darüber haben wir hinreichend gehandelt“ (Τίνα μὲν οὖν ἐστὶ τὰ τῶν ἀριθμῶν εἴδη ἔν τε τῇ καθ' αὑτούς καὶ τῇ πρὸς ἀλλήλους θεωρίᾳ, κἂν τῇ καθ' αὑτούς τε ἅμα καὶ πρὸς ἀλλήλους, καὶ δὴ καὶ ἐν τῇ πρὸς τὰ γεωμετρικὰ [Tannery statt μέγιστα] σχήματα αὐτῶν ἀπεικασίᾳ, εἴρηται ἀρκούντως ἡμῖν — 428, 9 ff.). — Es ist also nicht zu verkennen, daß es Domninos gelingt, alle Unstimmigkeiten durch systematische Gliederung zu vermeiden, indem er von vornherein der Arithmetik sowohl die Betrachtung der Anzahlen-Arten als auch die der Anzahlenverhältnisse zuweist. So haben wir es hier in der Tat — wie bei Euklid (vgl. S. 40 und 51) — mit einem einzigen Lehrgegenstand zu tun (vgl. den Ausdruck ἓν μάθημα bei Plato, Ges. 817 E), der sich — gemäß der Unterscheidung des καθ' αὑτό und des πρὸς ἄλλο — nach zwei Hauptgesichtspunkten ordnen läßt. Gleichzeitig erschließt uns aber auch die mit dieser verbundene zweite Unterscheidung des Domninos ein besseres Verständnis der in § 2 wiedergegebenen Kommentare des Olympiodor und des Gorgias-Scholiasten. Beide bringen — wie wir gesehen haben — die platonische „Logistik“ mit dem „Stoff“ der Anzahlen in Verbindung. Aus denselben (im nächsten Paragraphen zu besprechenden) Gründen, die es Nikomachos und Theon verbieten, die „reine“ Verhältnislehre mit der theoretischen Logistik zu identifizieren, steht zwar für Olympiodor und wohl auch für den Gorgias-Scholiasten, wie deren Beispiele zeigen, von vornherein fest, daß die Logistik nur als praktische Rechenkunst zu verstehen sei, d. h. als eine Reihe von Anweisungen zur Berechnung von jeweils in Frage kommenden Mengen. Aber beide begreifen diese Mengen — unabhängig davon, ob es sich um sinnlich wahrnehmbare Dinge oder um „reine“ Einsen handelt — als den „Stoff“ der Anzahlen, weil eben nur der Stoff im Sinne des Domninos Verhältnissen unterworfen sein kann, die jegliche Rechnung allererst ermöglichen. Eine genauere Betrachtung zeigt nun, daß bei Domninos die Unterscheidung des κατ' εἶδος und des κατὰ τὸ πλῆθος sich im wesentlichen, was ihren Anwendungsbereich betrifft, mit der Unterscheidung des καθ' αὑτό und des πρὸς ἄλλο deckt. Denn gegenüber der traditionellen Lehre von den Arten der Anzahlen, die der Betrachtung „καθ' αὑτό und κατ' εἶδος“ entspricht, stellt die Einführung der Lehre von der dekadischen Zählung als einer Betrachtung „καθ' αὑτό und κατὰ τὸ πλῆθος“ offensichtlich eine — nur aus der Sorge um die „Systematik“ zu verstehende — Neuerung des Domninos dar, wie ja auch die Verweisung auf die λογική bzw. λογιστική (vgl. S. 41, Anm. 3) θεωρία zeigt. Andererseits ist

der Gegenstand der Betrachtung „πρὸς ἄλλο und κατ' εἶδος“, nämlich: Anzahlen, die zueinander prim sind oder es nicht sind, sehr geringfügig gegenüber dem Gegenstand der Betrachtung „πρὸς ἄλλο und κατὰ τὸ πλῆθος“, d. i. eben der ganzen traditionellen Verhältnislehre samt der Lehre von den Proportionen und Medietäten. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß im dritten Abschnitt, wo — wie übrigens auch in den beiden letzten Abschnitten — die Unterscheidung κατ' εἶδος — κατὰ τὸ πλῆθος überhaupt nicht verwandt wird, genau genommen der gleiche Gegenstand behandelt wird wie bei der Betrachtung „πρὸς ἄλλο und κατ' εἶδος“. Die ordnende Systematik des Domninos darf also nicht darüber hinwegtäuschen, daß eigentlich nur die Verhältnislehre — wenn man von den „vollkommenen“, „übermäßigen“ und „mangelhaften“ Anzahlen absieht — unter den Gesichtspunkt des πρὸς ἄλλο und gleichzeitig jenen anderen des κατὰ τὸ πλῆθος fällt. Wenn wir damit die Interpretation Olympiodors und des Scholiasten vergleichen, wonach die Arithmetik es mit den Arten, die Logistik dagegen mit dem Stoff der Anzahlen zu tun habe — mag im übrigen Olympiodor von dieser Einsicht einen sehr unzureichenden Gebrauch machen —, so zeigt sich auch von dieser Seite eine auffallende Beziehung zwischen der traditionellen Verhältnislehre und der Logistik, von der bei Plato die Rede ist. — Was die Meinung Olympiodors und des Scholiasten anbetrifft, so bleibt noch immer die Frage ungeklärt, welcher Zusammenhang denn zwischen dem „Stoff“ der Anzahlen und dem Bereich der αἰσθητά bestehe (vgl. S. 28f.). Mit dieser Frage hängt unmittelbar die andere sich aufdrängende Frage zusammen, was es denn überhaupt mit der Unterscheidung κατ' εἶδος — κατὰ τὸ πλῆθος auf sich habe. Weist nicht am Ende diese Unterscheidung auf die alte platonische Gegenüberstellung der „theoretischen“ und „praktischen“ Disziplinen zurück? Wir werden auf diese Fragen im § 6 zurückkommen müssen.

Wenn wir nach alledem, unserer Vermutung gemäß, der theoretischen Logistik, wie sie Plato vorgeschwebt haben mag, vor allem die Betrachtung der Anzahlenverhältnisse zuweisen dürfen[1]), so haben wir doch

[1]) Die Worte πρὸς αὐτά in der platonischen Definition der Logistik (s. S. 29) können sich dagegen nur auf die innere Zusammensetzung der Anzahlen beziehen. Da man aber von ihrer — durch Summation (mit Hilfe des jeweiligen Gnomons) oder durch Multiplikation (zweier oder dreier Faktoren) zu erzielenden — Figuration absehen muß, weil diese gerade ihre eidetische Beschaffenheit betrifft (vgl. S. 37, Anm. 1 und S. 60f.), so bleibt dafür nur der „vollkommene“ bzw. „übermäßige“ oder „mangelhafte“ Anzahlencharakter übrig (vgl. S. 36f.). Dagegen spricht freilich, daß vor Euklid (IX, prop. 36) von „vollkommenen“ Anzahlen in diesem Sinne niemals die Rede ist — s. Cantor I³, S. 168. Vgl. aber Aristot., Met. Γ 2, 1004 b 10ff., wo von den ἴδια πάθη des ἀριθμός folgende aufgezählt werden: περιττότης, ἀρτιότης, συμμετρία, ἰσότης, ὑπεροχή, ἔλλειψις, und Aristoteles sagt ausdrücklich: καὶ ταῦτα καὶ καθ' αὑτοὺς καὶ πρὸς ἀλλήλους

andererseits daran festzuhalten, daß sie auch für Plato von Hause aus auf die Möglichkeit des Rechnens bezogen ist. So mag sie neben den ihr eigenen „Theoremen“ auch für „Probleme“ bzw. „Porismen“ Platz geboten haben — wie dies in der Geometrie üblich war (vgl. Proklus in Euclid., Friedlein S. 77; 178f.; 201; 212) —, in denen besondere Anzahlenverhältnisse zu bestimmen gewesen wären und die im Felde der „reinen“ Einsen den Rechenaufgaben der praktischen Logistik entsprochen hätten. (Als Beispiel wäre hier das berühmte, von Jamblich, Pistelli S. 62ff., erwähnte ἐπάνθημα des Thymaridas zu nennen, dessen Lebenszeit, wie Tannery und Cantor glauben, jedenfalls nicht nach Plato anzusetzen ist[1].) Aber diese Erwägungen leiten bereits zur Erörterung der Schwierigkeiten über, die die ganze Konzeption der theoretischen Logistik in sich birgt.

## § 5.
## Die theoretische Logistik und das Problem der Brüche.

Die Frage lautet: was verbietet denn den Späteren, die arithmetische Verhältnislehre als theoretische Logistik aufzufassen, oder mit anderen Worten: wie kam es, daß der doppelte platonische Gegensatz von theoretischer und praktischer Arithmetik einerseits und von theoretischer und praktischer Logistik andererseits auf den einfachen Gegensatz von theoretischer Arithmetik und praktischer Logistik reduziert wurde?

Zunächst einmal: mag sich auch innerhalb der platonischen Tradition die Erinnerung an eine mögliche isolierte Behandlung der arithmetischen Verhältnislehre erhalten haben, so braucht doch Platos Forderung einer mit der theoretischen Arithmetik koordinierten, aber von ihr zu unterscheidenden theoretischen Logistik keineswegs der bereits bei den Mathematikern seiner und der unmittelbar folgenden Zeit üblichen Einteilungsweise entsprochen zu haben. So fordert ja Plato bekanntlich auch eine „reine“, von den beobachtbaren Vorgängen am sichtbaren Himmel zur Erfassung der unsichtbaren Sphären aufsteigende Astronomie (Staat 529 A—530 C; vgl. Phileb. 62 A), was noch in der Spätzeit gerade Olympiodor (in den Scholien zum Philebos, edit. Stallbaum, 1820, S. 280) Veranlassung gibt, der ptolemäischen Astronomie, als einer die sichtbare Welt betreffenden Wissenschaft, die „reine“ Sphärenastronomie des Theo-

---

ὑπάρχει τοῖς ἀριθμοῖς. Vgl. auch Cantor I³, S. 225. — Es ist noch zu bemerken, daß Schleiermacher bei der Übersetzung der Gorgiasstelle 451 A—C (wie auch sonst) „Logistik“ mit „Rechenkunst“, in der Definition dagegen mit „Verhältnislehre“ wiedergibt.

[1]) Vgl. Tannery I, 106ff., Cantor I³, 158f., ferner Nesselmann, S. 232ff., Heath I, 94ff. — Ἐπάνθημα ist übrigens bei Jamblich durchaus terminus technicus (vgl. Pistelli, Index).

dosius von Tripolis bzw. Bithynien[1]) gegenüberzustellen. Das gleiche gilt von der Musik, wie denn überhaupt Plato gegenüber der Tetrade der „pythagoreischen" Disziplinen ein ähnlich gegliedertes, aber von der sinnlichen Wahrnehmung völlig befreites Wissen postuliert, dessen letzten Gegenstand die eine, unsichtbare und unhörbare, „kosmische" Ordnung bildet, wie sie dieser unseren, den Sinnen zugänglichen Welt zugrunde liegt[2]). Dieser einen Ordnung entspricht die innere Verwandtschaft aller auf dem Messen und Zählen (vgl. Phileb. 55 D ff.) gegründeten Wissenschaften (vgl. Staat 530 D, 531 D, 537 C und Archytas, Diels I³, 331, 7—9). So wird im Theaetet (145 A) Theodoros sowohl γεωμετρικός als auch ἀστρονομικός, λογιστικός und μουσικός genannt. So erhebt Plato im Staat (531 C) angesichts der Harmonielehre der „Pythagoreer" gegen diese den Vorwurf, sie forschten zwar in den Zusammenklängen nach den sie begründenden Anzahlen, aber sie bemühten sich nicht — ganz unabhängig von allem Hörbaren — um die Feststellung, „welche Anzahlen konsonant seien und welche nicht und warum es beide seien" (τίνες ξύμφωνοι ἀριθμοὶ καὶ τίνες οὔ, καὶ διὰ τί ἑκάτεροι). Also auch im Bereich der rein noetischen Anzahlenverhältnisse, mit anderen Worten im Bereich der theoretischen Logistik, gibt es für Plato „Konsonanz" und „Dissonanz" — was eben die spätere Auffassung von Nikomachos und Theon begründet[3]). (Vgl. auch die Terminologie in der so schwer verständlichen Stelle der Politeia, 546 C—D, wo von der für die guten Geburten maßgebenden Anzahl die Rede ist.) Die spezielle Forderung einer theoretischen Logistik entspringt der Einsicht, daß es innerhalb des einheitlichen rein noetischen Wissenschaftsgefüges auch eine der üblichen Rechenkunst entsprechende und sie allererst begründende Wissenschaft geben müßte, die auf die reinen Anzahlenverhältnisse als solche ausgerichtet wäre. Sie steht im Dienst der Forschung nach dem „Guten" (πρὸς τὴν τοῦ καλοῦ τε καὶ ἀγαθοῦ ζήτησιν), geht den Voraussetzungen der üblichen Rechenkunst und auch Harmonik nach und kümmert sich nicht um die Art, wie diese Wissenschaften sonst betrieben werden mögen.

Aber selbst wenn diese Forderung innerhalb der Wissenschaft ernst genommen und an den Aufbau einer Lehre von den Anzahlenverhält-

[1]) Siehe Rudolf Fecht, De Theodosii vita et scriptis, in Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, philol.-hist. Kl., neue Folge Bd. XIX, 4, Berlin 1927, bes. S. 9; ferner Heath, A hist. of gr. math. II, 245 f. — Die „Sphärik" geht wahrscheinlich auf Eudoxos zurück (vgl. Fecht, S. 7 f.).

[2]) Vgl. hierzu E. Frank, Plato und die sogenannten Pythagoreer, 1923, bes. S. 163 ff. und 65 ff. — Der Gesamtauffassung Franks kann ich allerdings nicht folgen.

[3]) Tannery (Mém. scient. III, 246 ff. — vgl. 69 f.) hat auf ein Archytasfragment in Boethius, De institutione musica III, 11, S. 285 f. (Friedl.) = Diels I³, 329, A 19 aufmerksam gemacht, das ein musikalisches Problem als rein arithmetisches, man müßte im Sinne Platos genauer sagen: als rein „logistisches" Theorem behandelt.

nissen geschritten wird, die neben die Lehre von den Anzahlen als solchen, d. h. von ihren verschiedenen Arten zu treten hätte, so zeigt sich doch bald, daß eine solche Scheidung in der Darstellung beider Lehrgebiete nur schwer durchführbar ist. Wir konnten dies bereits auf der ursprünglichen, „praktischen“ Stufe bemerken (S. 32) und haben dann zur Genüge die Schwierigkeiten kennengelernt, mit denen die neuplatonischen Darstellungen in dieser Hinsicht kämpfen müssen. Ein weiterer Hinweis auf diese Schwierigkeiten wäre vielleicht auch darin zu erblicken, daß Plato im Politikos (259 E) der Logistik die Erkenntnis des „Unterschiedes in den Anzahlen“ (τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς διαφοράν) zuweist, womit ebensogut das Geschäft der Arithmetik bezeichnet werden könnte (vgl. 258 D, ferner auch Staat 587 D).

Doch das entscheidende Hindernis erwächst der theoretischen Logistik — wenn man sich den Zusammenhang vor Augen hält, der zwischen ihr und dem Rechnen besteht —, in den *Brüchen*, genauer in den *Bruchteilen* der Recheneinheit. Sie hat es, wie wir gesehen haben (S. 33—35), mit Einheiten zu tun, die nur vom Verstande erfaßt werden können, alle untereinander gleich sind und darüber hinaus auch *jeder Teilung spotten*. Wollte man versuchen, so schildert Plato selbst diesen Sachverhalt (Staat 525 E), eine solche Eins zu teilen, so lachen einen die sachkundigen Mathematiker aus und lassen das nicht zu, und „während du sie zerstückelst (wörtlich: in Scheidemünze umsetzst), vervielfältigen jene sie, indem sie sich davor in acht nehmen, daß die Eins etwa nicht als Eins, sondern als viele Teile erscheine“ (καταγελῶσί τε καὶ οὐκ ἀποδέχονται, ἀλλ᾽ ἐὰν σὺ κερματίζῃς αὐτό, ἐκεῖνοι πολλαπλασιοῦσιν, εὐλαβούμενοι μή ποτε φανῇ τὸ ἓν μὴ ἓν ἀλλὰ πολλὰ μόρια — vgl. dazu Parmen. 143 A und Soph. 245 A). Die fundamentale Bedeutung dieses Sachverhalts wird auch gebührend von den Späteren hervorgehoben. Theon gibt die Paradoxie, die in der Aufteilung der Eins liegt, folgendermaßen wieder: jede Anzahl läßt sich durch Aufteilung verringern und in kleinere Anzahlen zerlegen, τὸ δὲ ἓν ἂν μὲν ἐν αἰσθητοῖς διαιρῆται, ὡς μὲν σῶμα ἐλαττοῦται καὶ διαιρεῖται εἰς ἐλάττονα αὐτοῦ μόρια τῆς τομῆς γινομένης, ὡς δὲ ἀριθμὸς αὔξεται — Hiller, 18, 18—21: „die Eins aber, wenn sie im Bereich der sinnlich wahrnehmbaren Dinge aufgeteilt wird, wird zwar als *Körper* verkleinert und durch Vollzug der Teilung in Teile zerlegt, die kleiner als dieser Körper sind, *anzahlen*mäßig dagegen wird sie vergrößert.“ D. h.: wenn *ein* sinnlich wahrnehmbares *Ding* in mehrere Stücke aufgeteilt wird, so verringert sich dieses Ding seinem körperlichen Umfang nach, wird aber im Hinblick auf seine frühere *Einheit* dadurch vervielfältigt: ἀντὶ γὰρ ἑνὸς γίνεται πολλά: „denn an Stelle des *einen* [Dinges] treten nun *viele* [Dinge].“ Mit anderen Worten: aufgeteilt wird das eine körperliche *Ding*, nicht aber das, was

wir an diesem als „Eins" ansprechen, nämlich die Eins selbst, deren Sein in gar nichts anderem als in ihrem Eins-Sein besteht, — die Eins, „im Hinblick auf welche ein jegliches der seienden Dinge als eines angesprochen wird" (die μονάς, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται — Euklid VII, Def. 1 — vgl. Theon 20, 17 f.). Nach der Teilung kommt jedem einzelnen Teilstück dieses selbe Eins-Sein zu, d. h. es gibt nun mehrere „Einsen" — die Eins hat sich vervielfältigt! Wir haben es bei jeder Zählung und Rechnung von vornherein mit vielen Einsen zu tun und wenn wir im Verlauf der Rechnung dazu genötigt werden, eine dieser Einsen aufzuteilen, so schieben wir eben damit der in sich selbst unteilbaren Eins etwas unter, was der Teilung unterworfen ist, während jene Eins selbst nicht geteilt, sondern nur weiter vervielfältigt wird. Dieser Vorgang kann sich immer von neuem wiederholen (Theon 18, 9—14), ohne daß die Unteilbarkeit und Unzerlegbarkeit der Eins bzw. der Einsen angetastet wird: ἀμέριστον καὶ ἀδιαίρετον τὸ ἓν ὡς ἕν — 18, 15; καὶ μέχρις ἀπείρου ἐὰν πολλαπλασιάζωμεν τὴν μονάδα, μένει μονάς [1]) — 19, 10f.: „und wenn wir die Eins bis ins Unendliche vervielfältigen, so bleibt sie [und damit jede einzelne Eins] doch immer — Eins". So ergibt sich die Notwendigkeit, zwischen dem einen, der Zählung und Rechnung unterworfenen, sinnlich wahrnehmbaren Ding und der Eins als solcher, zwischen den einzelnen Dingen und den Einsen streng zu unterscheiden. Das einzelne Ding kann ins Unendliche geteilt werden, was in seiner sinnlich wahrnehmbaren Körperlichkeit begründet ist. Die Eins dagegen, die nur vom Verstande erfaßt werden kann, ist schlechthin unteilbar, und zwar gerade sofern sie diesen rein noetischen Charakter trägt: ὥστε ἡ μὲν μονὰς νοητὴ οὖσα ἀδιαίρετος, τὸ δὲ ἓν ὡς αἰσθητὸν εἰς ἄπειρον τμητόν — 20, 2—4. Diese Eigenschaft der noetischen Eins macht nun offenbar eine Rechnung mit ihr unmöglich. So heißt es bei Proklus (im unmittelbaren Anschluß an das Zitat S. 24 — Friedl. 40, 5ff.) vom Rechner: καὶ ἐλάχιστον μὲν οὐδὲν εἶναι συγχωρεῖ [sc. ὁ λογιστικός] καθάπερ ὁ ἀριθμητικός, ὡς μέντοι πρός τι γένος λαμβάνει τὸ ἐλάχιστον. ὁ γὰρ εἷς ἄνθρωπος μέτρον αὐτῷ γίνεται τοῦ πλήθους ὡς μονάς: „er [der Logistiker] räumt nicht ein, wie es der Arithmetiker tut, daß es ein Kleinstes [schlechthin] gibt, wohl aber nimmt er in bezug auf irgendeine Gattung von [sinnlich wahrnehmbaren] Dingen ein Kleinstes hin. Denn der eine Mensch wird ihm zum Maß für eine Menge von Menschen gleich der Eins selbst für die Anzahlen [in der Arithmetik]." [2]) Und noch genauer lesen wir im Abschnitt 6 des dem Geminos bzw. Anatolius zugeschriebenen Fragments (Heron IV, 98, 24—100, 3 — dieses Fragment setzt unmittelbar die

---

[1]) Vgl. Stenzel, Zahl und Gestalt¹, S. 36f.

[2]) Vgl. die weiter unten (S. 102) zitierte Aristoteles-Stelle: Metaph. M 3, 1078a 23ff.

Erörterung über die Logistik im Charmides-Scholion [vgl. S. 25f.] fort): ἐπεὶ δὲ τὸ ἕν (statt μέν Heiberg) ἐστιν ἐν τῇ ὕλῃ ἐλάχιστον, ὁποῖον ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἡ μονάς, προσχρῆται τῷ ἑνὶ ὡς ἐλαχίστῳ τῶν ὑπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος ὁμογενῶν. ἕνα γοῦν τίθεται ἄνθρωπον ἐν πλήθει ἀνθρώπων ἀδιαίρετον, ἀλλ' οὐχ ἅπαξ, καὶ μίαν δραχμὴν ἐν δραχμαῖς ἄτομον, εἰ καὶ ὡς νόμισμα διαιρεῖται: „da das Eine [das einzelne Ding] im Bereich des Stofflichen das [jeweils, nicht schlechthin] Kleinste ist, wie es in der Arithmetik die Eins selbst ist, benutzt sie [die Logistik] das Eine [das einzelne bestimmte Ding] als das kleinste [Element] der in ein und derselben Menge vereinigten gleichartigen Dinge; so setzt sie in einer Menge von Menschen den einen [einzelnen] Menschen als unaufteilbar, aber nicht schlechthin unaufteilbar [wie es nur die Eins selbst ist], und in einer Menge von Drachmen die eine [einzelne] Drachme als unteilbar, auch wenn sie als Münze durchaus geteilt werden kann." Die rechnerische Einheit ist nur in ihrer „Substrat"-Funktion unteilbar. Wird an einer Apfelmenge irgendeine Rechnung ausgeführt, so ist der eine Apfel insofern das „kleinste", weiter nicht reduzierbare Element, als alle Rechenoperationen auf ihn als ihre letzte Grundlage bezogen sind. Die Reihe der einzelnen ganzen Äpfel macht hier jenes „homogene" Medium aus, in dem das Zählen und Rechnen statt hat. Erweist es sich nun als nötig, mit Bruchteilen von Äpfeln zu operieren, so bleibt doch die Grundlage der Rechnung, nämlich der eine ganze Apfel, unangetastet. Bei dem in Bruchteile aufgeteilten Apfel handelt es sich nur um das mit der Eigenschaft der unbegrenzten Teilbarkeit behaftete Ding als solches, nicht aber um dieses Ding, sofern es der Zählung unterliegt und das Grundelement der ganzen Rechnung darstellt. In dieser letzteren Eigenschaft besteht die Funktion des einen Apfels eben darin, ἐν τῇ ὕλῃ die Vertretung der μονάς inne zu haben. „Brüche" sind immer nur Bruchteile des der Rechnung zugrunde gelegten Dinges als solchen, das vermöge seiner Körperlichkeit ins Unendliche geteilt werden kann. Im Gebiet der „reinen" Anzahlen dagegen bildet die Eins selbst die letzte Grenze aller möglichen Teilungen: bei der Eins gelangt hier alle Teilung zu ihrem Ende (καταλήξει εἰς ἕν — Theon 18, 11 u. 13f.)[1]. Daher sagt Proklus (in Tim. — Diehl II, S. 138, 23): . . . ἐπεὶ καὶ ἕκαστος ἀριθμὸς κατὰ τὸ οἰκεῖον εἶδος εἷς ἐστι καὶ ἀμερής, κατὰ δὲ τὴν οἷον ὕλην μεριστός, καὶ ουδὲ ταύτην πᾶσαν, ἀλλὰ τὸ ἔσχατον καὶ ἐν ταύτῃ ἀμερές, εἰς ὃ καὶ ἡ κατάληξις: „eine jegliche Anzahl ist im Hinblick auf die ihr eigene Art eins und unteilbar, im Hinblick auf den — wie man sagen kann — Stoff (vgl. Domninos 415, 7 — s. oben S. 41) dagegen ist sie teilbar, aber doch auch nicht in bezug auf den ganzen Stoff, vielmehr ist auch in diesem das Letzte [nämlich die Eins] unteilbar, bei dem man eben

[1]) Vgl. Nikomachos 5, 1—5, Jamblich 7, 18–22, Proklus in Eucl. 184, 24f., usw.

[mit der Zählung oder Rechnung und vor allem Teilung] am Ende anlangt." (Vgl. auch Aristoteles, Physik Γ 7, 207 b 1 f. und Γ 6, 206 b 30—32.)

Bedenkt man nun, daß bei der Durchführung einer Rechnung in der Mehrzahl der Fälle die Notwendigkeit eintritt, Bruchteile der Recheneinheit einzuführen, so zeigt sich ein auffallendes Mißverhältnis zwischen dem Stoff, auf den solche Rechnungen bezogen sind, und jenem anderen „Stoff" der „reinen" Anzahlen, dessen noetischer Charakter gerade in der Unteilbarkeit der Einsen seinen Ausdruck findet[1]). Eine Rechnung, die möglichst genau sein will, kann also gar nicht im Gebiet der so verstandenen „reinen" Anzahlen vollzogen werden. Die unmittelbare Folge dieser Einsicht ist — jedenfalls innerhalb der platonischen Tradition — die Ausschließung aller rechnerischen Probleme aus dem Bereich der „reinen" Wissenschaften[2]). Darüber hinaus erhebt sich aber nun die Frage — und das ist die entscheidende Frage, die an die theoretische Logistik zu stellen ist —, ob denn gerade das, was das genaue Rechnen auszeichnet, nämlich das Operieren mit Bruchteilen der Recheneinheit, durch das Wissen um die möglichen Beziehungen zwischen den Anzahlen, durch die „reine" Verhältnislehre allein überhaupt zureichend begründet werden kann.

Es ist hier vor allem zu prüfen, ob dies in den „arithmetischen" Büchern Euklids geschieht. — Wenn man bedenkt, daß das 10. Buch, das die „inkommensurablen" Größen zum Gegenstand hat, auf Theaetet (und Theodoros) zurückgeht und daß dieses Buch seinerseits die Bücher IX, VIII und VII voraussetzt, so wird man mit Zeuthen[3]) vermuten dürfen, daß der wesentliche Gehalt auch dieser Bücher auf der Arbeit Theaetets beruht. Theaetet selbst aber gehört unmittelbar dem platonischen Kreise an. Das 13. Buch Euklids, das die Konstruktion der sog. „platonischen Körper", d. i. der fünf regulären

[1]) Es ist eine ὕλη νοητή oder φανταστή, da nach der neuplatonischen, in diesem Punkt auf aristotelische Begriffe zurückgehenden Systematik das entsprechende Seelenvermögen die φαντασία ist (vgl. z. B. Proklus in Eucl. 53, 1 u. 21 f.; 51, 13 ff.; 55, 5).

[2]) Wir sehen hier davon ab, daß gerade zu Platos Zeit die Frage erörtert wird, ob überhaupt „Probleme", die es ja mit der „Konstruktion" bestimmter Figuren, mit dem „Errechnen" bestimmter Anzahlen, kurz mit der γένεσις mathematischer Gebilde zu tun haben, in das Gebiet der „reinen", auf immer Seiendes gerichteten Wissenschaften hineingehören (vgl. Plato, Staat, 527 A f.). Man müßte hier genauer von „Porismen" sprechen (vgl. Proklus in Eucl. 77 ff., auch 178 f., 201 u. 212, ferner Pappus, Hultsch II, 650, dazu Heiberg, Litter.-gesch. Studien über Euklid, 1882, S. 62 ff.). Doch ist in diesem Zusammenhang auch der ursprüngliche Sinn von πρόβλημα zu beachten — Plato, Staat, 530 B, 531 C; vgl. Soph. 261 A—B.

[3]) Sur la constitution des livres arithmétiques d'Euclide ... (Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1910), S. 405 ff., bes. 419—421. — Vgl. auch Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Eukleides, S. 1014 und Tannery, La géom. gr., S. 102 Anm.

Polyeder, lehrt — und damit den Abschluß der „Elemente“ im „platonischen“ Sinne ermöglicht[1] —, ist im wesentlichen sein Werk[2]. So ist auch verständlich, daß die Bücher VII, VIII, IX in konsequenter Weise die Einführung von Bruchteilen der Recheneinheit vermeiden, während sie sehr wohl den Begriff des Bruchteils bezw. der Bruchteile einer Anzahl — und zwar definitionsgemäß (VII, Def. 3 und 4) — verwenden (vgl. insbesondere VII, 37 und 38). — In diesen Büchern ist nun zwar „arithmetisches“ und „logistisches“ Gut kaum voneinander zu trennen; zweifellos überwiegt aber der „logistische“ Bestandteil, der hier eben als „arithmetischer“ verstanden wird, was offenbar die spätere ἀριθμητικὴ παράδοσις auch der Verhältnislehre ermöglicht (vgl. S. 40 und auch S. 28, Anm. 1). Vom „systematischen“ Zusammenhange des ganzen Aufbaus der Elemente aus gesehen gewinnen die Bücher VII—IX ihre Bedeutung erst im Hinblick auf das 10. Buch[3]; ihrem sachlichen Gehalte nach stellen sie aber u. a. die Begründung jeder, über das einfache Zusammenzählen und Abziehen hinausgehenden Rechnung dar, sofern es sich bei einer solchen Rechnung als notwendig erweist, einzelne Anzahlen in ihre Bestandteile (Faktoren) zu zerlegen, das größte gemeinsame Maß (den größten gemeinsamen Teiler) von mehreren Anzahlen zu finden, das Verhältnis zwischen Anzahlen auf ihren „kleinsten“ Ausdruck zu bringen usf. — Dennoch läßt sich auf diese Weise die Aufteilung der Einsen selbst, die bei der Durchführung einer genauen Rechnung in den meisten Fällen gar nicht zu umgehen ist, nicht begründen. Es ist daher auch nicht möglich, in der Verhältnislehre der „arithmetischen“ Bücher Euklids das noetische Analogon zur praktischen Logistik zu erblicken. Das „Rechnen“ mitsamt seinen Voraussetzungen muß demnach ganz und gar in den Bereich der praktischen Wissenschaften und Künste verwiesen werden. Die „reine“ Verhältnislehre dagegen bekommt so jene schwan-

---

[1]) Vgl. Proklus in Eucl. 68, 20—23: Καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι (sc. Εὐκλείδης) καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. — Trotz dieses Zeugnisses ist Euklid selbst durchaus nicht einfach als „Platoniker“ anzusprechen. Die Art, in der er das Werk Theaetets in die „Elemente“ einbaut, beweist keineswegs seine Zugehörigkeit zu einer bestimmten philosophischen Schule. Er scheint nicht minder durch peripatetische Auffassungen beeinflußt zu sein (vgl. S. 103f.; ferner Heiberg, Litter.-gesch. Studien üb. Euklid, S. 27).

[2]) Vgl. Scholion zu Buch XIII, Heiberg-Menge V, S. 654, 1—10; Suidas, v. Θεαίτητος. Dazu Tannery, La géom. gr., S. 101; Eva Sachs, Die fünf platonischen Körper. Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer (Philologische Untersuchungen, hrg. von A. Kießling u. U. v. Wilamowitz-Moellendorff, Heft 24), 1917, S. 76ff.

[3]) Von daher ist auch wesentlich die Darstellung der Anzahlen durch gerade Linien bestimmt. Zu berücksichtigen ist hier aber das S. 103f. Gesagte! (Vgl. auch Heiberg, Litt.-gesch. St. üb. Eukl., S. 30f.)





kende Stellung, die sie bald der Arithmetik als der Lehre von den Anzahlenarten, bald der Harmonik als der Lehre von den — auf Anzahlenverhältnissen gegründeten — musikalischen Intervallen zuweisen läßt[1]). Überdies wird ihre Sonderstellung von einem ganz anderen Problemzusammenhang aus bedroht: die Entdeckung inkommensurabler, „irrationaler" Größen läßt sie als bloßen Spezialfall der allgemeinen Verhältnis- und Proportionenlehre erscheinen, wie sie uns im 5. Buch Euklids entgegentritt[2]). Sie verliert so jede Beziehung zur Rechenkunst, die ihrerseits jeden Anspruch auf den Rang einer strengen, apodeiktischen Disziplin aufgeben muß. Die Logistik wird darauf beschränkt, Anweisungen zur schnellen und bequemen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zu geben, und zwar nicht nur auf „schriftlichem", sondern vor allem auf „mechanischem" Wege, mit Hilfe der Finger und des Rechenbretts; sie hat ferner die Bruchrechnung und wohl auch — unter Zuhilfenahme geometrischer Überlegungen — das Wurzelausziehen (für Quadratwurzeln) zu üben, das Zählsystem für große Anzahlen — namentlich im Hinblick auf astronomische Berechnungen — fortzubilden und endlich „eingekleidete" Aufgaben zu lösen, wie sie uns in den sog. arithmetischen Epigrammen der Anthologia Palatina überliefert worden sind[3]). Sie umfaßt auf diese Weise etwa den Lehrbereich unserer heutigen elementaren Arithmetik. Aber wir dürfen nicht vergessen: diese Stellung der Logistik ist in der besonderen Auffassung der „reinen" Anzahlen und ihrem „Stoff" begründet, wie sie in der platonischen Tradition immer maßgebend blieb. Um sie in ihrer Tragweite und ihren Grundlagen verstehen zu können, müssen wir endlich daran gehen, den Begriff des ἀριθμός selbst genauer zu klären. Erst damit dürfen wir hoffen, auch den Sinn jener platonischen Definitionen der Arithmetik und Logistik, die allen bisherigen Erörterungen zugrunde lagen, in bestimmterer Weise faßbar zu machen.

[1]) Was übrigens zur Erörterung der Beziehung διάστημα — λόγος führen muß (vgl. Theon 81 f.; ferner Aristot., Phys. Γ 3, 202 a 18 f., dazu B 3, 194 b 27 f. und 195 a 31).

[2]) Dieses Buch geht bekanntlich auf Eudoxos zurück. — Vgl. dazu Aristoteles, Metaph. Δ 15, 1020 b 26—28 und b 32—1021 a 14, wo eine der möglichen Bedeutungen des πρός τι gerade an der arithmetischen Verhältnislehre aufgezeigt und dabei bereits auf deren Verallgemeinerung Bezug genommen wird (vgl. hierzu übrigens auch Plato, Parmenides 140 B—C).

[3]) Vgl. S. 25, Anm. 4; S. 41, Anm. 3; ferner Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendl. vom 7. bis 13. Jahrh., 1869, S. 73 ff.; Tannery, Mém. scient. III, S. 331; eine ausführliche Zusammenstellung findet sich neuerdings bei Heath, A hist. of greek mathem., 1921, I, S. 39—64. — Friedlein, aaO., S. 74, zitiert übrigens eine Stelle aus Lukian, aus der hervorgeht, daß im allgemeinen Sprachgebrauch Arithmetik und Logistik — beide in ihrer „praktischen" Bedeutung genommen — durchaus zusammenfallen können (vgl. oben S. 32).

## § 6.
## Der Begriff des ἀριθμός.

Das Grundphänomen, das wir bei der Bestimmung der Bedeutung von ἀριθμός niemals aus den Augen verlieren dürfen, ist das Zählen, genauer: das Abzählen einer beliebigen Menge von Dingen. Diese Dinge, mögen sie noch so verschieden sein, werden im Zählen von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus betrachtet: es sind z. B. entweder Äpfel oder Äpfel und Birnen, die als Früchte, oder Äpfel, Birnen und Teller, die als „Gegenstände“ gezählt werden. Sofern diese Dinge dem Zählen unterliegen, werden sie also als gleichartig angesehen. Das beim Abzählen zuletzt ausgesprochene Wort gibt die Anzahl, den ἀριθμός der betreffenden Dinge an. So heißt es bei Plato (Theaet. 198 C): ΣΩ. Τὸ δὲ ἀριθμεῖν γε οὐκ ἄλλο τι θήσομεν τοῦ σκοπεῖσθαι πόσος τις ἀριθμὸς τυγχάνει ὤν. ΘΕΑΙ. Οὕτως: „Sokr.: unter Zählen wollen wir doch nichts anderes verstehen als: nachsehen, wie groß eine Anzahl im gegebenen Falle ist. Theaet.: Jawohl!“ Der ἀριθμός gibt also jeweils eine bestimmte Anzahl von bestimmten Dingen an. Er sagt aus, daß ihrer gerade so und so viele sind. Er meint die Dinge, sofern sie in dieser bestimmten Anzahl vorhanden sind, und ist von diesen Dingen zunächst gar nicht zu lösen. Wenn Plato von Anzahlen spricht (Staat 525 D), die „sichtbare und tastbare Körper haben“ (vgl. S. 35), so ist dieser Ausdruck durchaus wörtlich zu verstehen. Hat man es z. B. mit der Zählung von Hunden, von Pferden und von Schafen zu tun, so liefern die Ergebnisse dieser Zählungen eben je eine bestimmte Pferde-, Hunde- und Schafanzahl. (Vgl. die Ausdrücke „Apfel“- und „Schalen“-anzahlen bei Proklus und im Charmides-Scholion — S. 24 f.[1]).) Aristoteles, der wie stets auf das in der Rede eigentlich Gemeinte verweist, sagt von der „Anzahl-Gleichheit“ mit aller wünschenswerten Deutlichkeit (Physik Δ 14, 224 a 2 ff.) folgendes: λέγεται δ' ὀρθῶς καὶ ὅτι ἀριθμὸς μὲν ὁ αὐτὸς ὁ τῶν προβάτων καὶ τῶν κυνῶν, εἰ ἴσος ἑκάτερος, δεκὰς δὲ οὐχ ἡ αὐτὴ οὐδὲ δέκα ταὐτά, ὥσπερ οὐδὲ τρίγωνα τὰ αὐτὰ τὸ ἰσόπλευρον καὶ τὸ σκαληνές. καίτοι σχῆμά γε ταὐτό, ὅτι τρίγωνα ἄμφω· ταὐτὸ γὰρ λέγεται οὗ μὴ διαφέρει διαφορᾷ, ἀλλ' οὐχὶ οὗ διαφέρει, οἷον τρίγωνον τριγώνου διαφορᾷ διαφέρει· τοιγαροῦν ἕτερα τρίγωνα· σχήματος δὲ οὔ, ἀλλ' ἐν τῇ αὐτῇ διαιρέσει καὶ μιᾷ. σχῆμα γὰρ τὸ μὲν τοιόνδε κύκλος, τὸ δὲ τοιόνδε τρίγωνον, τούτου δὲ τὸ μὲν τοιόνδε ἰσόπλευρον, τὸ δὲ τοιόνδε σκαληνές. σχῆμα μὲν οὖν τὸ αὐτὸ καὶ τοῦτο (τρίγωνον γάρ), τρίγωνον δ' οὐ τὸ αὐτό. καὶ ὁ ἀριθμὸς δὴ ὁ αὐτός· οὐ γὰρ διαφέρει ἀριθμοῦ διαφορᾷ ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν· δεκὰς δ' οὐχ ἡ αὐτή· ἐφ' ὧν γὰρ λέγεται, διαφέρει· τὰ μὲν γὰρ κύνες, τὰ δ' ἵπποι: „es

[1]) Vgl. ferner den Titel der archimedischen Schrift Ψαμμίτης, worunter „ψαμμίτης ἀριθμός“ zu verstehen ist (Hultsch in Pauly-Wissowa, v. Archimedes, S. 515). So heißt es z. B. bei Archimedes II² 244, 18: ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμός.

wird auch ganz richtig gesagt, daß die *Anzahl* der Schafe und der Hunde *dieselbe* sei, wenn beider Anzahl *gleich* ist, aber die „*Zehn*" ist [in beiden Fällen] *nicht dieselbe*, noch sind die zehn [Schafe und die zehn Hunde] dieselben zehn [Dinge], wie ja auch das gleichseitige und das verschiedenseitige Dreieck nicht dieselben Dreiecke sind. Freilich, ihre *Figur* ist dieselbe, da eben beide „Dreiecke" sind. Denn als *dasselbe* [wie dieses bestimmte Etwas] wird dasjenige angesprochen, wovon sich dieses Etwas nicht durch einen [Art-]Unterschied unterscheidet, nicht aber dasjenige, wovon es sich [in dieser Weise] unterscheidet, wie sich z. B. das eine der genannten Dreiecke vom anderen durch einen [Art-]Unterschied unterscheidet: es sind ja in der Tat verschiedene Dreiecke. Aber nicht der *Figur* nach sind sie verschieden, sie fallen vielmehr in ein und dieselbe Einteilung derselben [nämlich unter ein und dieselbe Unterart der Gattung «Figur»]. Denn eine *so* beschaffene Figur ist ein Kreis, und eine *so* beschaffene ein Dreieck, vom Dreieck aber ist das *so* beschaffene ein gleichseitiges und das *so* beschaffene ein verschiedenseitiges. Auch dieses [das verschiedenseitige] ist nun *dieselbe* **Figur** [wie das gleichseitige] — denn es ist ja ein «Dreieck» —, *aber eben nicht dasselbe* **Dreieck.** Und *ebenso* ist [in jenen beiden Fällen] die *Anzahl dieselbe*: denn die [Hunde-]Anzahl und die [Pferde-]Anzahl unterscheiden sich nicht durch einen Unterschied der Anzahl [es sind in beiden Fällen: zehn . . .], *aber die «Zehn» ist nicht dieselbe*, denn sie unterscheidet sich durch das, *wovon sie ausgesagt wird*: in dem einen Fall von *Hunden*, in dem anderen von *Pferden*." — Hier wird also „Zehn" in Parallele zu „Dreieck" gesetzt: so wenig es ein Dreieck gibt, das *weder* gleichseitig *noch* verschiedenseitig wäre, *so wenig gibt es eine Zehn, die nicht diese oder jene zehn bestimmte Dinge wäre.* Ein „Dreieck" ist immer ein *bestimmtes* Dreieck, nämlich ein gleichschenkliges oder gleichseitiges oder verschiedenseitiges. Eine „Zehn" ist immer eine *bestimmte Anzahl*, nämlich eine *bestimmte Anzahl von bestimmten Dingen*, von Äpfeln, von Hunden, von Rindern, im extremen Fall — von „reinen", nur dem Verstande zugänglichen Einsen. So sehr sich dieser extreme Fall von *allen* übrigen unterscheidet, — der Charakter des ἀριθμός als einer „bestimmten Anzahl von . . ." *bleibt auch in ihm erhalten.* πᾶς γὰρ ἀριθμός τινός ἐστι sagt Alexander (im Metaphysikkommentar — Hayduck 86, 5): „denn jede Anzahl ist *Anzahl von Etwas*"[1]. Daher könne der ἀριθμός zur Kategorie des πρός τι gerechnet werden. Das heißt: eine Anzahl ist immer unablösbar auf das bezogen, wovon sie Anzahl ist.

---

[1]) Vgl. Aristot., Metaph. N 5, 1092b 19f.: Καὶ ἀεὶ ὁ ἀριθμὸς ὃς ἂν ᾖ τινῶν ἐστίν . . .

Dieser Sachverhalt läßt sich nicht dadurch wiedergeben, daß man von „konkreten“ oder „benannten“ Zahlen im Gegensatz zu „abstrakten“ oder „unbenannten“ spricht. Auch eine „reine“ Anzahl, d. i. eine Anzahl von „reinen“ Einsen, ist nicht weniger „konkret“ oder „benannt“ als eine Anzahl von Äpfeln. Was diese Anzahl in beiden Fällen kennzeichnet, ist ihre **doppelte** Bestimmtheit: sie ist erstens eine Anzahl von so und so bestimmten Gegenständen und sie zeigt zweitens an, daß es dieser Gegenstände gerade so und so viele gibt. Es geht auch nicht an, von einer solchen Anzahl zu sagen, sie sei „die Zusammenfassung einer Vielheit zur Einheit“. Das mag für den Begriff der Anzahl überhaupt Geltung haben, aber nicht für den jeweils von ihm intendierten Inhalt. Im Vollzuge der Zählung, im actus exercitus (um uns eines Ausdrucks der Schule zu bedienen), hat man allein die Vielheit der gezählten Dinge im Auge. Man kann nur „zählen“, was nicht eines ist, was eben in einer gewissen Anzahl vorliegt: weder ein sinnlich wahrnehmbares Ding noch eine „reine“ Eins sind eine Anzahl von Dingen oder Einsen. Die „Eins“ als solche ist kein ἀριθμός, was nur dann merkwürdig erscheint, wenn man vom Begriff der „natürlichen Zahlenreihe“ ausgeht. Die kleinste Anzahl von Dingen oder Einsen ist: zwei Dinge oder Einsen (vgl. Aristoteles, Phys. Δ 12, 220 a 27; Met. I 6, 1056 b 25 ff; M 9, 1085 b 10). Noch kleiner als die kleinste Anzahl ist freilich die Eins selbst. Eben darin gründet ihr ἀρχή-Charakter: sie macht so etwas wie „Zählung“ allererst möglich (vgl. S. 48f. und 58f.). Daß aber eine Menge, eine Anzahl von Gegenständen überhaupt als eine Menge, als eine Anzahl faßbar ist, daß vieles „eines“ sein kann, ist erst von der pythagoreisch-platonischen Philosophie als ein Grund**problem** herausgestellt worden, das weit über den Bereich der Betrachtung von Anzahlen hinausführt, aber eben doch immer an diese Betrachtung gebunden bleibt.

Bevor wir weitergehen, müssen wir erst zu verstehen suchen, wie sich vom natürlichen Phänomen des Zählens aus die Konzeption der „reinen“ Anzahlen im Gegensatz zu den „sichtbaren oder tastbaren“ Anzahlen ergibt. Wir können uns dabei unmittelbar von den platonischen Bestimmungen leiten lassen. Die ständige Übung des Zählens und Rechnens bildet allmählich jenes Vertrautsein mit den Anzahlen und ihren Beziehungen aus, das Plato als die ἀριθμητική bzw. λογιστική (τέχνη) bezeichnet und das uns in jedem einzelnen Fall in den Stand setzt, die Zählung und Berechnung durchzuführen. Hier aber taucht die Frage auf, wovon denn die Anzahlen Anzahlen sind, über die wir in unserem Wissen vor jeder einzelnen Zählung und Berechnung verfügen und die doch offenbar nicht an die der Zählung im einzelnen Fall unterworfenen Dinge gebunden sein können. Diese Frage stellen, heißt das Problem der „wissenschaftlichen“ Arithmetik bzw. Logistik erstmalig aufwerfen. Nicht mehr

geht es in dieser Frage um die Bedürfnisse des täglichen Lebens, um das zu immer wechselnden Ergebnissen führende Zählen und Berechnen der verschiedenen, in ihrem Sein unbeständigen Dinge, sondern um das Verständnis der Möglichkeit dieses Tuns selbst, um das Verständnis dafür, daß hier ein Wissen vorliegt und daß es also ein entsprechendes Seiendes geben muß, das sich immer in derselben Weise verhält und daher überhaupt erst „gewußt" werden kann. Die in dieser Fragestellung liegende Abwendung der Seele von den Dingen des täglichen Lebens, die Änderung ihrer Blickrichtung, ihre περιαγωγή und μεταστροφή (Staat 518 D), führt sie gerade zur Frage nach der besonderen Beschaffenheit jenes allein im strengen Sinne Wißbaren und auch immer schon bis zu einem gewissen Grade Gewußten, das den Gegenstand der Arithmetik und Logistik bildet. Verlangt wird ein Gegenstand, der rein noetischen Charakter hat und zugleich alle wesentlichen Kennzeichen des Zählbaren als solchen aufweist. Diese Forderung erfüllen eben die „unsinnlichen", nur dem Verstande zugänglichen, voneinander nicht zu unterscheidenden und sich jeder Teilung widersetzenden „reinen" Einsen (vgl. S. 33ff. u. 47ff., auch S. 58). Der „wissenschaftliche" Arithmetiker und Logistiker hat es mit Anzahlen von reinen Monaden zu tun. Und Plato betont mit Nachdruck, wie wir gesehen haben, daß dies „keinen geringen Unterschied" gegenüber den gewöhnlichen Anzahlen ausmacht. In der Tat muß es befremdlich genug erscheinen, daß es Anzahlen von — nichts geben soll. Wie soll denn der im „natürlichen" Zählen und Berechnen befangene Blick diese in keiner Weise greifbaren oder sichtbaren Monaden ergreifen? Erst eine genaue Überlegung, daß es, um die Möglichkeit und das Gelingen von Zählungen und Berechnungen zu verstehen, wirklich notwendig ist, Anzahlen anderer Art, als es die gewöhnlichen sind, anzunehmen, zwingt zu der weiteren Annahme, daß es eben einen besonderen „unsinnlichen" Stoff geben muß, auf den diese Anzahlen bezogen sind. Man sieht sofort den ungeheueren propädeutischen Wert ein, den das Verständnis dieses Tatbestandes für die platonische Lehre haben muß: ist sie doch ständig bemüht, das nicht den Sinnen Zugängliche als den wahren Gegenstand des Wissens herauszustellen. Hier liegt nun in der Tat ein μάθημα vor, das als ὁλκὸν ἐπὶ τὴν οὐσίαν anzusprechen ist (Staat 524 E; 523 A). Es zwingt die Seele, mit dem Verstande allein die Wahrheit, wie sie sich an ihr selbst zeigt, zu betrachten (526 A—B). Jedermann ist imstande einzusehen — wenn er nur nachdrücklich darauf hingewiesen wird —, daß sein Zählen- und Rechnenkönnen die Existenz „unsinnlicher" Einsen voraussetzt.

So bietet sich dem Blick des „wissenschaftlichen" Arithmetikers und Logistikers ein unbegrenztes Feld „reiner" Einsen dar (vgl. Aristot., An. post. A 10, 76 b 4f.). Die einzelnen Mengen, die sich aus diesem

Feld herausgreifen lassen — das eben sind die „reinen" Anzahlen (von Einsen), mit denen er es zu tun hat. Von hier aus sind die überlieferten „klassischen" Definitionen des ἀριθμός zu verstehen. Eudoxos (Jambl. in Nikom. 10, 17f.): ἀριθμός ἐστιν πλῆθος ὡρισμένον: „eine Anzahl ist eine begrenzte Menge" (von Einsen) — vgl. Aristoteles, Metaph. Δ 13, 1020 a 13: πλῆθος πεπερασμένον; Euklid (VII, Def. 2): τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος: „die aus Einsen bestehende Menge" — vgl. Aristot., Met. I 1, 1053 a 30: πλῆθος μονάδων. Ferner: „eine Vereinigung von Einsen" (μονάδων σύστημα — Theon 18, 3; Nikom. 13, 7f.; Jambl. 10, 9; Domninos 413, 5; σύνθεσις μονάδων — Aristot., Met. Z 13, 1039 a 12); „eine aus Einsen bestehende Zusammenschüttung im Bereich des Wievielhaften" (ποσότητος χύμα ἐκ μονάδων συγκείμενον — Nikom. 13, 8). Anzahlen sind — kurz gesagt — viele Einsen: πολλὰ γὰρ ἕκαστος ὁ ἀριθμὸς ὅτι ἕνα ...[1]): „denn eine jegliche Anzahl ist Vieles, weil sie Einsen ist", d. h. gar nichts anderes als mehrere oder viele Einsen darstellt (Aristot., Met. I 6, 1056 b 23 — vgl. Phys. Γ 7, 207 b 7)[2]). „Die Menge [Vielheit] ist gleichsam die Gattung der Anzahl" (τὸ δὲ πλῆθος οἷον γένος ἐστὶ τοῦ ἀριθμοῦ — ebda., 1057 a 2f. — vgl. Jambl. 10, 18f.). Daher sind „Anzahl" und „Eins" Gegensätze (Aristot., 1056 b 19f.), mag man auch in übertragener Bedeutung von der Eins sagen können, sie sei „eine gewisse, wenn auch geringe Menge" (πλῆθός τι, εἴπερ καὶ ὀλίγον — 1056 b 13f.), nämlich die Menge Eins. (Vgl. die Definition Chrysipps — bei Jambl. in Nikom. 11, 8f. und Syrian. in Arist. metaph., Kroll 140, 9f. — μονὰς ἐστι πλῆθος ἕν.) In dieser Möglichkeit gründen die Definitionen der Anzahlenreihe: προποδισμὸς πλήθους ἀπὸ μονάδος ἀρχόμενος καὶ ἀναποδισμὸς εἰς μονάδα καταλήγων: „ein Vorwärtsschreiten der Menge, beginnend mit der Eins, und ein Zurückschreiten derselben, aufhörend mit der Eins" (Theon 18, 3ff. — vgl. Jambl. in Nikom. 10, 16f.; diese Definition geht vielleicht auf Moderatos — 1. Jahrh. n. Chr. — zurück — vgl. Theon 18, Anm.). Ebenso Domninos (413, 5ff.): ὁ δὲ σύμπας ἀριθμός ἐστι προκοπὴ ἀπὸ μονάδος κατὰ μονάδος ὑπεροχὴν ἄχρις ἀπείρου: „der gesamte Anzahlbereich ist ein Fortgang von der Eins aus bis ins Unendliche in der Weise, daß jede folgende Anzahl die vorangehende um eine Eins übertrifft." Die Anzahlenreihe kann als das Ergebnis einer fortschreitenden Vervielfachung der Eins verstanden werden: πρὸς τὴν μονάδα πάντες οἱ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἀπὸ δυάδος ἀρξάμενοι συγκρινόμενοι τὰ τοῦ πολλαπλασίου εὔτακτα εἴδη ἀπογεννῶσι τῇ οἰκείᾳ ἀκολουθίᾳ: „in bezug auf die Eins erzeugen alle aufeinanderfolgenden Anzahlen, mit der Zwei beginnend,

[1]) Vgl. S. 101.

[2]) Vgl. Plato, Theaet. 204 E: ΣΩ. Ὁ δὲ ἑκάστων ἀριθμὸς μῶν ἄλλο τι ἢ μέρη ἐστίν; ΘΕΑΙ. Οὐδέν. Aristoteles, Metaph. B 4, 1001 a 26: ὁ μὲν γὰρ ἀριθμὸς μονάδες ... Alexander, in metaph. 55, 25f. (Hayd.): αἱ δὲ μονάδες ἀριθμοί.

die wohlgeordnete Reihe der Arten des Vielfachen, gemäß der ihnen [nämlich den Anzahlen] eigenen Reihenfolge" (Nikom. 46, 13ff.). Von der Eins als „Menge" kann eben nur in uneigentlicher, die Dinge „vermischender" Rede gesprochen werden (συγκεχυμένως sagt Jamblich 11, 7). Die Eins ist vielmehr das in jeder Zählung und somit jeder Anzahl anzutreffende gleichbleibende und nicht weiter reduzierbare Grundelement. Eine Anzahl bestimmen heißt die vorliegenden einzelnen Einheiten der Reihe nach abzählen, mag es sich nun um einzelne sinnlich wahrnehmbare Dinge, um einzelne Vorgänge innerhalb der Seele oder um einzelne „reine" Einsen handeln. Das Zählbare muß als Zählbares so gegliedert sein, daß die jeweiligen Einheiten einander gleichen (vgl. S. 53) und doch voneinander gesondert und deutlich unterschieden (διωρισμένα) sind. Das bedeutet: den einzelnen Einheiten kommt als Zähleinheiten Gleichartigkeit und abgeschlossene Ganzheit zu. Mit diesen Charakteren ist ihre innere Unteilbarkeit und äußere Diskretheit gegeben — die wesentlichen Kennzeichen des Feldes der „reinen" Einsen. Die „Diskretheit" der Anzahlen ist allein in der Diskretheit der Einsen begründet, nämlich darin, daß die einzelnen Einsen als „Teile" der Anzahlen — im Gegensatz zu den Teilstücken kontinuierlicher Größen — keine „gemeinsame Grenze" (keinen κοινὸν ὅρον) haben (vgl. Aristot., Kateg. 4, 4 b 25, dazu Phys. E 3 und Z 1). Eben dies macht aber überhaupt erst so etwas wie „Zählung" und „Anzahl" möglich: als „Anzahl von . . ." setzt jede Anzahl bestimmte diskrete Einheiten voraus. Solche diskreten Einheiten können aber ihrerseits das „homogene" Medium der Zählung nur in der Weise bilden, daß jede Einheit — wie immer sie sonst beschaffen sein mag — als unteilbares Ganzes angesehen wird (vgl. S. 49). Eine Anzahl ist in diesem Sinne immer „eine Menge unteilbarer Gebilde" (πλῆθος ἀδιαιρέτων — Aristot., Metaph. M 9, 1085 b 22). Und immer ist so die unteilbare Eins selbst das letzte, das Grundelement aller Zählung und aller Anzahl (vgl. S. 47ff.). Daher kann Aristoteles sagen (Metaph. I 1, 1052 b 22ff.): πᾶν τὸ ποσὸν γιγνώσκεται ᾗ ποσὸν τῷ ἑνί, καὶ ᾧ πρώτῳ ποσὰ γιγνώσκεται, τοῦτο αὐτὸ ἕν· διὸ τὸ ἓν ἀριθμοῦ ἀρχὴ ᾗ ἀριθμός: „alles Wieviel wird als Wieviel durch die Eins erkannt, und das, wodurch irgendwelche Mengen zuletzt [als Mengen] erkannt werden — das ist die Eins selbst; so ist die Eins Ursprung der Anzahl als Anzahl", nämlich das, was jeder Anzahl ihren „Anzahl von . . ."-Charakter verleiht und sie damit erst zur „Anzahl" macht. Die Möglichkeit, eine Anzahl von Einsen als solche zu erkennen, setzt die Kenntnis der Eins voraus. In diesem Sinne hat die Eins einen Vorrang der „Kennbarkeit"[1]. Aber dieser Vorrang ist nur ein Ausdruck dafür, daß die Seinsmöglichkeit

[1]) Vgl. dazu die Diskussion bei Plato, Theaet. p. 203—206. Deren eigentliche Bedeutung klärt sich erst im Hinblick auf den „Sophistes" — vgl. § 7 C.

der Anzahl im Sein der Eins begründet ist: γνωριμώτερον . . . μονὰς ἀριθμοῦ· πρότερον γὰρ καὶ ἀρχὴ παντὸς ἀριθμοῦ: „kennbarer . . . ist die Eins als die Anzahl; denn sie ist aller Anzahl vorgeordnet und deren Ursprung“ (Topik Z 4, 141 b 5ff.). Und bei Jamblich heißt es in demselben Sinne (11, 1f.): μονὰς δέ ἐστι ποσοῦ τὸ ἐλάχιστον ἢ ποσοῦ τὸ πρῶτον καὶ κοινὸν μέρος ἢ ἀρχὴ ποσοῦ: „die Eins ist des Wieviel kleinstes [Element], oder: das allem Wieviel zugrunde liegende und gemeinsame Teilstück, oder: der Ursprung des Wieviel“ (ebenso bei Syrianos, in Arist. metaph. comm., Kroll 140, 6f.). Unbegrenzt ist die Möglichkeit, die Zählung über immer mehr Einsen zu erstrecken, aber nach dem Weniger zu gibt es eine letzte Schranke: hier ist es notwendig, beim Unteilbaren stehen zu bleiben (ἀνάγκη στῆναι ἐπὶ τὸ ἀδιαίρετον — Aristot., Physik Γ 7, 207 b 8), nämlich bei der unteilbaren Eins (vgl. S. 49f.). Alle diese Bestimmungen entspringen ein und derselben ursprünglichen, am Phänomen des Zählens orientierten Anschauung und stehen noch diesseits der möglichen Meinungsverschiedenheiten über die Seinsart der „reinen“ Anzahlen bzw. der „reinen“ Einsen selbst sowie über die Art der Priorität der Eins vor der Anzahl. Hierüber soll erst in den nächsten Paragraphen gehandelt werden. —

Von welchem Gesichtspunkt aus betrachtet nun aber der Anzahlenkundige das unbegrenzte Feld der „reinen“ Einsen? Mit dieser Frage sehen wir uns wieder auf die Definitionen der Arithmetik und Logistik verwiesen, von denen wir ausgegangen waren (s. S. 29). Wir können jetzt besser verstehen, warum diese Definitionen gerade nicht die Anzahlen als den von beiden Wissenschaften zu betrachtenden Gegenstand bezeichnen. Die Unbegrenztheit und Homogeneität des Monadenfeldes gestatten eine beliebige und beliebig oft wiederholbare Zusammenfassung der Einsen zu Monadenverbänden, d. i. eben zu Anzahlen von Einsen. Solcher Anzahlen gibt es demnach für die „mathematische“ Betrachtungsweise — genau wie der Einsen selbst — unbegrenzt viele. Als erste Aufgabe erwächst folglich der „wissenschaftlichen“ Anzahlenkunde — im Gegensatz zur „praktischen“, die sich mit der (noch dazu unvollkommenen, weil sich selbst nicht verstehenden) Kenntnis eben dieser Anzahlen begnügt — eine solche Gliederung und Ordnung der Monadenverbände, daß ihre Mannigfaltigkeit von bestimmten Eigenschaften her völlig überschaubar und damit ihre unbegrenzte Vielheit dennoch eingegrenzt werde. Es gilt, im Felde der „reinen“ Einsen selbst nach den Eigenschaften zu suchen, die eine Zusammenfassung der verschiedenen Monadenverbände unter einige wenige Gesichtspunkte gestatten, und zwar in der Weise, daß damit eine erschöpfende Übersicht über alle möglichen Mengen, alle mögliche Anzahl, alle mögliche Vielheit gewonnen wird. Denken wir daran, wie Plato (Theaet. 147 C ff.) den

Theaetet — in einem sehr fortgeschrittenen Stadium der wissenschaftlichen Geometrie und Arithmetik — sein Vorgehen bei der Betrachtung von Linien und Anzahlen schildern läßt, bedenken wir vor allem, was Plato hieran für die von Sokrates gerade geführte Untersuchung der Frage nach der ἐπιστήμη — und, wie wir sagen dürfen, jeder sokratischen Frage dieser Art[1]) — so vorbildlich erscheint. Vom Nachweis bestimmter inkommensurabler Größen (δυνάμεις)[2]) ausgehend, denen — sofern sie „quadriert" werden — bestimmte Anzahlen (von Maßeinheiten) entsprechen, und im Hinblick darauf, daß es solcher Größen (und also auch der entsprechenden Anzahlen) unbegrenzt viele gibt (ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο), versucht er sie „in je Eines zusammenzufassen" (συλλαβεῖν εἰς ἕν), wodurch er sie alle (πάσας) gehörig bezeichnen könnte. Zu diesem Zweck teilt er u. a. den gesamten Anzahlbereich (τὸν ἀριθμὸν πάντα) in zwei Gebiete: zu dem einen gehören alle Anzahlen, die aus einer mit sich selbst (d. h. soviel mal als sie selbst Monaden enthält) vervielfältigten Anzahl entstehen können, zum anderen alle diejenigen, die aus der Vervielfältigung einer Anzahl mit einer anderen Anzahl entstehen können. Die ersten nennt er „quadratische", die zweiten „promekische" bzw. „heteromekische" Anzahlen, welche Bezeichnungen sich auch in allen späteren arithmetischen Darstellungen wiederfinden. Hiermit sind nun in der Tat zwei εἴδη gegeben, die den unübersehbaren, weil unbegrenzten Anzahlbereich zu gliedern und einzugrenzen gestatten, zumal wenn man an die Stelle des einen εἶδος, nämlich des der προμήκεις, die verschiedenen εἴδη der Polygonal-Anzahlen setzt. Daß es sich jeweils um ein und dasselbe εἶδος handelt, kann dabei unmittelbar mit Hilfe des Gnomons gezeigt werden. Überhaupt ist das Operieren mit dem Gnomon, d. i. einer Figur oder Punktkonfiguration, die, an ein Gebilde bestimmter Art angelegt, ein an Gestalt „ähnliches", d. h. artgleiches Gebilde hervorbringt (vgl. Heron IV, 44, Def. 58; Theon 37, 11—13; Jambl. 58, 19ff.), nur innerhalb einer Betrachtung sinnvoll, die sich das Aufsuchen von Figuren- und Anzahlenarten angelegen sein läßt. Die griechische theoretische Arithmetik hat es eben zunächst einzig und allein mit den verschiedenen Arten der Anzahlen zu tun. Wie sollte sie sich auch sonst mit der Unbegrenztheit des ihr vorliegenden Stoffes abfinden können? Sie betrachtet also nicht unmittelbar die Anzahlen selbst, sie betrachtet, mit anderen Worten nicht unmittelbar die Monaden, die in irgendeiner Anzahl vor-

[1]) Es besteht allerdings ein besonders enger Zusammenhang zwischen der Beschaffenheit der ἐπιστήμη und der Beschaffenheit des Gegenstandes, dem die Forschungen Theaetets gewidmet sind — vgl. § 7 C, bes. S. 92f.

[2]) Über eine mögliche Textkorrektur bezüglich des Terminus δύναμις vgl. Tannery, Mém. scient. II, S. 91ff. Dazu andererseits Stenzel, Zahl u. Gestalt[1], S. 94. — Endgültiges hat hierüber wohl H. Vogt, Bibl. math., 3. Folge, X, 113f., gesagt.

liegen mögen, sie sucht vielmehr alle möglichen Monadengruppierungen überhaupt von bestimmten, d. h. eindeutige Merkmale aufweisenden Gebilden aus zu fassen, die ihrerseits auf letzte Elemente, wie etwa das ταὐτόν und das ἕτερον, das ἴσον und das ἄνισον, das πέρας und das ἄπειρον, zurückgeführt werden können. Erst durch die Zugehörigkeit zu einem von solchen ἀρχαί „ableitbaren" εἶδος wird eine Anzahl in ihrem Sein als bestimmte, d. i. begrenzte Anzahl, als **ein** Verband gerade so und so vieler Monaden, verständlich, wie immer man sich die Seinsart der εἴδη selbst denken mag. Während die Bestimmtheit jeder Anzahl als einer „Anzahl von etwas" durch die reinen Einsen oder durch die jeweils vorliegenden Gegenstände gegeben ist, läßt sich jene andere Bestimmtheit der Anzahlen (vgl. S. 55) — nämlich die Bestimmtheit der Anzahlen als jeweils begrenzter Anzahlen (von reinen Einsen oder irgendwelchen Dingen) — nur von einer besonderen Artbeschaffenheit her verstehen, d. h. von etwas her, was in sich selbst eines ist und daher Einheit verleihend, Ganzheit stiftend und damit erst begrenzend ist. Gerade weil der ἀριθμός als solcher nicht Eines, sondern Vieles ist, bedarf es zum Verständnis seiner jeweiligen Begrenztheit des Aufsuchens des diese Vielheit begrenzenden εἶδος, bedarf es mit anderen Worten der ἀριθμητική als theoretischer Disziplin.

Nun sind die umfassendsten, der ἀρχή-Stufe am nächsten kommenden und daher als πρώτιστα zu bezeichnenden εἴδη (vgl. S. 36) — das Ungerade und das Gerade. Durch diese „erste" Aufteilung des Anzahlbereichs (πρώτη τομή — Theon 21, 20; Nikom. 13, 9) vom Gesichtspunkt des „Geraden" und des „Ungeraden" aus (vgl. Plato, Politik. 262 E: ... εἰ τὸν ... ἀριθμὸν ἀρτίῳ καὶ περιττῷ τις τέμνοι ...) werden alle Anzahlen in der Weise betroffen, daß die eine ganze Hälfte des Anzahl-Bereichs (ὁ ἥμισυς τοῦ ἀριθμοῦ ἅπας — Plato, Phaid. 104 A) unter das „Ungerade", die andere unter das „Gerade" fällt, wobei jede dieser Hälften immer noch eine unbegrenzte Menge von Anzahlen einschließt. Aber diese unbegrenzten Mengen sind jetzt jede für sich eindeutig von bestimmten Merkmalen aus „in Eins" (εἰς ἕν) zusammengefaßt: alle Anzahlen, die sich in zwei gleiche Teile aufteilen, d. h. restlos entzweiteilen lassen, sind „gerade" (vgl. Plato. Gesetze X, 895 E), alle Anzahlen, die sich nicht in dieser Weise aufteilen, d. h. immer nur bis auf eine — in sich selbst unteilbare — Eins entzweiteilen lassen, sind „ungerade". Diese letzte Eigenschaft, das „Ungeradesein", kann offenbar nur in einem Felde diskreter und unteilbarer Einheiten vorgefunden werden: hängt sie doch jeweils an einer einzelnen „überzähligen", ihrer „Natur" nach unteilbaren Eins[1]). Dagegen ist die Eigenschaft, ohne „Rest" in zwei gleiche

[1]) Vgl. Domninos, 413, 13 f.: die ungeraden Anzahlen lassen sich nicht in zwei gleiche Teile aufteilen διὰ τὸ τὴν μονάδα ἀδιαίρετον εἰναι τῇ αὐτῆς φύσει (Nikom. 15, 9:

Teile geteilt zu werden, den Anzahlen und den stetigen, d. i. unbegrenzt teilbaren und also immer entzwei zu teilenden Größen[1]) gemeinsam (vgl. Plato, Ges. 895 E: ἔστιν που δίχα διαιρούμενον ἐν ἄλλοις τε καὶ ἐν ἀριθμῷ . . .). Das Ungeradesein allein ist folglich für das Zählbare als solches charakteristisch, während das Geradesein innerhalb des Anzahlbereichs und alles Zählbaren überhaupt gleichsam noch etwas darüber Hinausreichendes, „Anderes", nämlich die Möglichkeit der unbegrenzten Teilbarkeit und also in gewisser Weise das „Unbegrenzte" selbst vertritt[2]). Von hier aus mag es sogar notwendig erscheinen, unter dem „Ungeraden" und dem „Geraden" εἴδη zu verstehen, die sich wechselseitig völlig ausschließen. So ist wohl in dem Philolaosfragment 5, Diels I³, 310, 11—14, vom ἄρτιον im Sinne des ἀρτιάκις ἄρτιον (d. h. in heutiger Terminologie der Potenzen von Zwei — wie bei Theon 25, 6 ff., Nikomachos 15, 4 ff. und Domninos 414, 4 ff., nicht wie bei Euklid VII, Def. 8 — vgl. Euklid IX, 32—34) und vom περισσόν im Sinne des περισσάκις περισσόν (einschließlich der Primzahlen, mit Ausnahme der Zwei) die Rede. Diesen beiden εἴδη tritt dann das aus beiden „gemischte" εἶδος, nämlich das des ἀρτιοπέριττον zur Seite. Wir werden noch die Beziehung zu berücksichtigen haben, die diese Klassifikation mit den kosmologischen Lehren im „Timaios" und „Philebos" verbindet. Für den vorliegenden Zusammenhang ist nur die Bezeichnung des περισσόν und des ἄρτιον als der δύο ἴδια εἴδη des ἀριθμός hervorzuheben. Trotz des Vorrangs des Ungeraden vor dem Geraden (vgl. Theol. arithm., De Falco 83, 13 = Diels I³, 304, 3: . . . πρότερος ἀεί ἐστιν ὁ περισσὸς [sc. ἀριθμός] τοῦ ἀρτίου), der darin begründet ist, daß das Ungerade der unbegrenzten Teilbarkeit eine Grenze in Gestalt einer unteilbaren Eins entgegensetzt, erscheint doch das Gerade neben dem Ungeraden als zweites wesentiches Kennzeichen des diskreten Anzahlbereichs[3]). Wird das Ungerade und das Gerade in dem üblichen Sinne verstanden, so ist die entsprechende Einteilung des Anzahlbereichs insofern vollständig und eindeutig, als jede Anzahl entweder ungerade oder gerade ist. Mit anderen Worten: jeder Anzahl kommt notwendig entweder das Ungerade oder das Gerade zu: ἀναγκαῖόν γε θάτερον τῷ ἀριθμῷ ὑπάρχειν, ἢ περιττὸν ἢ

. . . τὴν φύσει ἄτομον μονάδα . . .); Nikom. 13, 13: διὰ τὴν . . . τῆς μονάδος μεσιτείαν. (S. auch oben S. 47 f. und Aristot., Metaph. M 8, 1083 b 29 f.; Top. Z 4, 142 b 8; endlich Euklid VII, Def. 7.)

[1]) Vgl. Arist., Phys. Γ 7, 207 b 10 f.: ἄπειροι γὰρ αἱ διχοτομίαι τοῦ μεγέθους.

[2]) Vgl. Heidel, Πέρας and Ἄπειρον in the pythagorean philosophy (Archiv f. Gesch. d. Philos. XIV, 1901), besonders S. 395 f. die Zitate aus Plutarch und Aristoxenos. — S. vor allem Aristot., Phys. Γ 4, 203 a 10 ff., dazu die Definition der „Eins" als der περαίνουσα ποσότης durch Thymaridas (Jamblich 11, 3 und Theon 18, 5).

[3]) Vgl. Plato, Kritias 119 D, wo von einer möglichen Benachteiligung eines dieser beiden εἴδη die Rede ist.

ἄρτιον (Aristot., Kat. 10, 12a 7 f.) — es gibt nichts „Mittleres" dazwischen (οὐκ ἔστι γε τούτων οὐδὲν ἀνὰ μέσον) wie etwa zwischen Weiß und Schwarz (vgl. Metaph. I 4, 1055 b 24 f.). Das bedeutet aber, daß diese Bestimmungen das Sein der Anzahl, des Zählbaren als solchen betreffen (vgl. S. 36), nämlich die οὐσία des ἀριθμός als einer jeweils ihrem Wieviel nach bestimmten Anzahl. Äußerlich drückt sich dieser Sachverhalt in der allgemeinen Bekanntheit der Unterscheidung von ungeraden und geraden Anzahlen aus, die sogar die Grundlage eines Spiels, des ἀρτιάζειν, abgibt (vgl. Plato, Lysis 206 E). So bildet diese Unterscheidung — neben der des Männlichen und des Weiblichen sowie des Rechts und des Links — für Plato auch das Vorbild aller „natürlichen" Diairesis (vgl. Politik. 262 A—E; Phaidr. 265 E) [1]. Während aber diese Unterscheidung die Bestimmtheit der Anzahlen als begrenzter, d. h. ihrem Wieviel nach bestimmter Anzahlen betrifft, ist sie ganz unabhängig von der Art der gezählten Einheiten, ganz unabhängig von dem jeweils der Zählung zugrunde liegenden „Stoff".

Indem also die Definitionen der Arithmetik und der Logistik im „Gorgias" und im „Charmides" weder vom ἀριθμός noch von ἀριθμοί sprechen, bringen sie nicht nur den Umstand zum Ausdruck, daß die unbegrenzt vielen und beliebig oft zusammenstellbaren Monadenverbände nur von bestimmten, an diesen Verbänden immer wieder anzutreffenden εἴδη her der ἐπιστήμη zugänglich sind, sondern auch daß die charakteristischen Kennzeichen aller möglichen Anzahlenarten — vom Ungeraden und Geraden angefangen — bei allem Zählbaren vorzufinden sind, gleichgültig ob es sich um sinnlich wahrnehmbare Dinge oder um „reine" Einsen handelt. So sind in der Tat diese Definitionen der Arithmetik und Logistik unabhängig vom theoretischen oder praktischen Gebrauch beider Disziplinen, wenngleich sie nur von der theoretischen Betrachtungsweise aus die vorliegende Fassung erhalten können. Das letztere ist freilich bereits damit gegeben, daß es sich um „Definitionen" im strengen Sinne handelt. Aber die Strenge dieser Definitionen liegt hier eben gerade darin, daß sie von der doppelten Bestimmtheit des ἀριθμός nur diejenige seiner jeweiligen, in einem εἶδος wurzelnden Begrenztheit kennzeichnen, sich damit über den Bereich alles Zählbaren schlechthin erstrecken — und doch die Unbestimmtheit vermeiden, die dem Terminus „ἀριθμός" selbst anhaftet, sofern er von sich aus nicht erkennen läßt, was für eine Anzahl, d. h. eine Anzahl wovon mit ihm gemeint ist. Andererseits tut diese Strenge beider Definitionen ihrer „Allgemeinverständlichkeit" keinen Abbruch, weil hier 1. keineswegs die Einsicht vorausgesetzt wird, daß die ἀριθμοί, mit denen es

[1] Vgl. Stenzel, Studien[1], S. 59, 62 f.; Zahl und Gestalt[1], S. 21.

die ἐπιστήμη zu tun hat, Anzahlen von „reinen“ Einsen sind, und 2. mit den beiden εἴδη des Geraden und des Ungeraden an eine durchaus vertraute Unterscheidung erinnert wird. Wir werden darüber hinaus noch sehen, daß diese Fassung auch durch bestimmte ontologische Erwägungen nahegelegt zu sein scheint.

Wir können nun auch endlich den Kommentaren des Olympiodor und des Gorgias-Scholiasten (S. 26f.) zu ihrem Recht verhelfen. Die Arithmetik hat es mit den Anzahlen zu tun, sofern diese Verbände darstellen, deren Einheit in der Einheit eines bestimmten εἶδος wurzelt, mag dieser Umstand auch dem in praktischer Absicht Zählendem zumeist verborgen bleiben. Als theoretische Disziplin beachtet jedenfalls die Arithmetik das jeweilige „Wieviel“, die jeweilige unter das betreffende εἶδος fallende Menge von Monaden nur mittelbar. Jede „logistische“ Überlegung dagegen, mag sie praktischer oder theoretischer Natur sein, zielt notwendig, sofern es ihr ja auf die Beziehung der Anzahlen untereinander ankommt, unmittelbar auf dieses „Wieviel“, auf die Menge des jeweils Aufeinanderbezogenen bzw. Berechneten, d. i. auf den der Beziehung bzw. Rechnung zugrunde liegenden „Stoff“. Während aber die Definition der Logistik bei Plato es völlig in der Schwebe läßt, ob dieser Stoff dem Bereich des sinnlich Wahrnehmbaren oder dem des rein Noetischen angehört — wodurch gerade die Universalität der Definition gesichert erscheint —, müssen Olympiodor und der Gorgias-Scholiast die „hylischen“ Monaden, d. h. die die ὕλη der Anzahlen bildenden Monaden (vgl. die Bestimmungen bei Domninos S. 41 ff.) von vornherein als sinnlich wahrnehmbare „Einheiten“ verstehen, weil nur diese eine Aufteilung dulden und so die Genauigkeit der Rechnung ermöglichen (vgl. S. 43 und 50). Damit geraten aber beide neuplatonische Kommentatoren unversehens in den Begriffsbereich einer ontologischen Auffassung, die sich mit der platonischen Monadenbestimmung nicht mehr verträgt. Die beiden nächsten Paragraphen, deren Gegenstand gerade die ontologische Problematik des ἀριθμός bildet, werden diesen Befund noch verdeutlichen helfen.

## § 7.

## Die ontologische Auffassung der ἀριθμοί bei Plato.

Die bisherige Darstellung vermied es, auf die ontologischen Gesichtspunkte einzugehen, die für die Herausarbeitung der Lehre von den ἀριθμοί bei den Griechen von Anfang an maßgebend gewesen sind. Es ist aber unmöglich, die griechische Mathematik als eine in sich selbst gegründete Wissenschaft begreifen zu wollen, es ist unmöglich, von ihrer ontologischen Problematik abzusehen, die ihre Fragestellung, ihre Darstellungsweise und ihre Entwicklung — zumal in ihren Anfängen — von Grund auf bestimmt. Ebenso unmöglich ist es andererseits, die griechische On-

tologie ohne Rücksicht auf ihre spezifisch „mathematische“ Orientierung zu verstehen. Ist doch der μάθημα-Charakter „mathematischer“ Sachverhalte für alles lehrbare und erlernbare Wissen vorbildlich. Und bestimmt doch gerade die Idee des „Wissens“ den gesamten Umkreis des ontologischen Fragens der Griechen. Der Rahmen dieser Arbeit verbietet freilich ein ausführliches Eingehen auf alle damit zusammenhängenden Probleme. Es sollen nur diejenigen Momente hervorgehoben werden, die zum Thema dieser Arbeit in unmittelbarer Beziehung stehen.

Seit dem Erscheinen der ersten grundlegenden Arbeiten von Julius Stenzel[1]) sind eine ganze Reihe von Versuchen unternommen worden, den für die mathematische Begriffsbildung so wesentlichen Zusammenhang zwischen der griechischen Mathematik und der griechischen Philosophie aufzuhellen[2]). Insbesondere hat Oskar Becker (Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen, Quell. u. Stud. B I, S. 464ff.) die Gedankengänge Stenzels weiter fortgeführt und die zentrale Bedeutung der „Monaden“ für das Verständnis der platonischen Lehre von den sog. „Idealzahlen“ hervorgehoben. In die gleiche Richtung wies bereits der Aufsatz von J. Cook Wilson, On the platonist doctrine of the ἀσύμβλητοι ἀριθμοί (The Classical Review XVIII, 1904, S. 247ff.), der, wie es scheint, zu wenig Beachtung gefunden hat. Die vorliegende Arbeit, die von einem anderen Problemansatz aus zu den gleichen Fragen Stellung nimmt — und sich in ihren Ergebnissen, was die platonische Anzahlenlehre betrifft, mit denen von Becker begegnet —, versucht in der Struktur des ἀριθμός-Begriffs selbst die Voraussetzungen aufzuweisen, die der griechischen Arithmetik und den auf sie bezüglichen ontologischen Auseinandersetzungen zugrunde liegen. Sie kann nur gelegentlich auf die zu diesem Thema von anderen Autoren geäußerten Ansichten eingehen[3]). Es sei daher gestattet, an dieser Stelle kurz folgendes anzumerken:

Hinsichtlich der Deutung des ἀριθμός-Begriffs und seiner Rolle in der griechischen Wissenschaft zeigt sich sowohl bei Stenzel als auch bei Becker eine gewisse Zwiespältigkeit. So betont Stenzel die „Anschaulichkeit“ und das „Gestalthafte“ des griechischen „Zahl“-Begriffs und will zum Verständnis desselben „das Widerspiel . . . von Denken, Zählen und Anschauung als Leitgedanken festhalten“ (Zahl und Gestalt[1], S. VI und 43f.), geht aber dabei von Überlegungen aus, die einer höchst reflektierten Denkstufe angehören, so daß die Grundphänomene, an denen er sich zu orientieren sucht, in ihrer schlichten Prägnanz nicht eigentlich sichtbar gemacht werden können. Ihm folgend spricht Becker von einem noch bei Aristoteles auftretenden „uns fremden, gestalthaften, «archaischen» Bedeutungssinn“ des ἀριθμός (S. 491 — vgl. Zahl und Gestalt[1], S. 5 u. 29), von den griechischen „Zahlgebilden“, die einen „gewissen anschaulichen «Umfang»“ haben, läßt sich aber im allgemeinen — und gerade auch bei der Interpretation

---

[1]) Studien zur Entwicklung der platonischen Dialektik von Sokrates zu Aristoteles. Arete und Diairesis, 1917 (2. erweit. Aufl. 1931); Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles, 1. Aufl. 1924; 2. Aufl. 1933. (Für die vorliegende Arbeit stand nur die 1. Aufl. zur Verfügung.)

[2]) Ein Verzeichnis dieser Arbeiten findet sich in der 2. Auflage von „Zahl und Gestalt“, S. VIIf.

[3]) Was insbesondere die Arbeiten von Toeplitz anbetrifft, so überschneiden sich deren Ergebnisse in mancherlei Weise mit denen der vorliegenden Arbeit. Aber die Verschiedenheit der beiderseitigen Ausgangspunkte macht es nicht leicht, sie völlig in Übereinstimmung zu bringen.

der ἀριθμοὶ εἰδητικοί — doch von unserem, ganz anders strukturierten Zahlbegriff leiten. Bei alledem spielt das Verhältnis der „Zahlen“ zur Geometrie und zur geometrischen Anschauung eine entscheidende Rolle. Nun ist es zweifellos richtig, daß zwischen der ausgebildeten griechischen Arithmetik und der Geometrie eine sehr enge Verbindung besteht, die sich in der Theorie der „figurierten“ Anzahlen, im Aufbau der Verhältnis- und Proportionenlehre und allgemein in der Art der Veranschaulichung arithmetischer (bzw. logistischer) Sachverhalte dokumentiert. Von dieser Verbindung leitet Zeuthen[1]) den Begriff der „geometrischen Algebra“ her, der seine ganze Auffassung der griechischen Mathematik bestimmt. Wir werden später noch zu betrachten haben, inwiefern dieser Begriff dem griechischen Verfahren nicht gerecht wird. Doch kann jedenfalls grundsätzlich gegen diese Betonung der „Anschaulichkeit“ des ἀριθμός-Begriffs eingewandt werden, daß sie einer Betrachtungsweise entspringt, die sich ihre Maßstäbe nicht von der griechischen, sondern von der symbolischen Mathematik vorgeben läßt. Nichts hindert uns aber, der Ursprünglichkeit der antiken Wissenschaft in der Weise Rechnung zu tragen, daß wir uns nur an den Phänomenen orientieren, auf die die griechischen Bestimmungen selbst hindeuten und die auch für uns, unbeschadet der Verschiedenheit unserer Blickrichtung, unmittelbar aufweisbar sind. Die griechische wissenschaftliche Arithmetik — und Logistik — hat ihr Fundament im „natürlichen“ Verhalten zu allem Zählbaren, wie es uns im täglichen Leben begegnet. Die Nähe zu dieser ihrer „natürlichen“ Basis wird von der antiken Wissenschaft niemals verleugnet. Damit ist gesagt, daß es, streng genommen, nicht angängig ist, von den ἀριθμοί als von „Zahlen“ zu sprechen. Die Besonderheit des griechischen „Anzahl“-Begriffs liegt darum auch weniger in seinem „archaischen“ oder „anschaulichen“ Charakter, der ihm gar nicht primär zukommt, als in der Art der Beziehung zwischen ihm und der von ihm gemeinten „Sache“ selbst. Wir werden in den letzten Paragraphen zu zeigen haben, wie diese Beziehung zwischen Begriff und intendiertem Inhalt auf dem Boden der modernen Begrifflichkeit eine grundlegende Modifikation erfährt und dadurch allererst der moderne Begriff der „Zahl“ möglich wird. Es handelt sich hierbei nicht bloß um die Exemplifizierung eines allgemeinen Sachverhalts, sondern um einen Versuch, die begriffliche Dimension, die für das moderne Bewußtsein überhaupt kennzeichnend ist, von einer für dieses entscheidenden Stelle aus genauer zu bestimmen.

## A. Die pythagoreische Wisssenschaft.

An der Herausarbeitung der Lehre von den ἀριθμοί haben zunächst zweifellos die von der Tradition als „Pythagoreer“ bezeichneten Männer wesentlichen Anteil. Daß sie es hierbei in erster Linie auf die „Ordnung innerhalb des Himmelgewölbes“ (Alex. in metaph., Hayduck, 75, 15 — Diels I³, 347, 1 f. u. 355, 29 — auf Grund der aristotelischen Schrift über die Pythagoreer — vgl. Eudem. bei Simpl. in de coelo, Heiberg, 471, 5 f. — Diels I³, 19, 12 f.), d. h. auf das Verständnis der sichtbaren Ordnung des sichtbaren Alls abgesehen hatten, wird eindeutig genug von Aristoteles bezeugt (Metaph. A 8, 989 b 33 f.: διαλέγονται . . . καὶ πραγματεύονται περὶ φύσεως πάντα und das Folgende; vgl. Metaph. A 5, 986 a 2 ff.;

[1]) Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, 1886; Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev rationel Videnskab. Avec un résumé en français (Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 8. Raekke, Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, 1. Bind, 5, 1917); Sur l'origine de l'Algèbre (Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, mathem.-fys. Medd. II, 4, 1919).

Phys. Γ 4, 203 a 7 f.; Δ 6, 213 b 22 ff.; De coelo Γ 1, 300 a 14 ff.) und auch von den meisten modernen Darstellungen anerkannt[1]). Der allgemeinste Gesichtspunkt ihrer Bemühung könnte folgendermaßen umschrieben werden: sie erblickten in der Zählbarkeit der Dinge dieser Welt deren eigentliche Grundlage, sofern der „Welt"-Zustand überhaupt erst durch τάξις, durch „Ordnung" — und das bedeutet: durch Wohlordnung — bestimmt ist, alle Ordnung aber auf dem Voneinanderabgegrenzt- und damit Zählbarsein der von ihr betroffenen Dinge beruht. Aristoteles, der ihren „Definitionen" Oberflächlichkeit vorwirft, gibt daneben in aller Klarheit den allgemeinen Grundsatz ihres Vorgehens an: dasjenige, dem in der Ordnung der Dinge vor allem anderen der jeweils in Frage stehende Terminus zugesprochen werden kann, mache das eigentliche Sein der betreffenden Sache aus (ᾧ πρώτῳ ὑπάρξειεν ὁ λεχθεὶς ὅρος, τοῦτ' εἶναι τὴν οὐσίαν τοῦ πράγματος ἐνόμιζον — Metaph. A 5, 987 a 22 ff.[2]). Ist nun die sichtbare Weltordnung — gemäß der aristotelischen, aber für alle griechische Kosmologie geltenden Aussage — die den sinnlich wahrnehmbaren Dingen selbst eigene Natur (ἡ γὰρ τάξις ἡ οἰκεία τῶν αἰσθητῶν φύσις ἐστίν — De coelo, Γ 2, 301 a 5 f. — dazu Met. Λ 10, 1075 a 11—23) bestimmt mit anderen Worten diese Ordnung die Dinge in ihrem Sein selbst, beruht ferner diese Ordnung in letzter Instanz auf der Möglichkeit, die Dinge zu unterscheiden und damit zu zählen (vgl. Philolaos., Fragm. 4, Diels I³, 310, 8—10), so läßt sich jenem pythagoreischen Grundsatz entsprechend daraus folgern, daß die Anzahlenbestimmungen der Dinge deren Sein selbst betreffen, daß das eigentliche Sein aller Dinge eben „Anzahl" sei (ἀριθμὸν εἶναι τὴν οὐσίαν ἁπάντων — Aristot., Metaph. A 5, 987 a 19). Alle Eigenschaften, Zustände und Verhaltungsweisen der Dinge müßten sich demnach auf die Eigenschaften zurückführen lassen, die ihnen kraft ihrer Zählbarkeit zukommen, auf die πάθη, die sich an allem Gezählten als solchem vorfinden lassen, wie auch die letzten „Elemente" und „Ursachen" alles Seienden mit den „Elementen" und „Ursachen" ihrer Zählbarkeit identisch wären (Metaph. A 5, 985 b 23—26, 29—986 a 6, 15—17; 8, 990 a 2 ff., 19). „Und was es in den Anzahlen und in den Fügungen [der Anzahlen][3]) an Eigenschaften und Bestandteilen gab, die sich mit denen des Himmelsgewölbes und der gesamten Weltordnung in Übereinstimmung bringen ließen, das eben brachten sie zusammen und paßten sie einander an" (καὶ ὅσα εἶχον ὁμολογούμενα ἔν τε τοῖς ἀριθμοῖς καὶ ταῖς ἁρμονίαις πρὸς τὰ τοῦ οὐρανοῦ πάθη καὶ μέρη καὶ πρὸς τὴν ὅλην

[1]) Vgl. Zeller, D. Philos. d. Gr., 1923 (7. Aufl.), S. 574 ff.; Burnet, D. Anf. d. gr. Philos., deutsche Ausgabe, 1913, S. 262 ff.; Stenzel, Metaphysik des Altertums, 1931, S. 46.

[2]) Vgl. dazu von den drei Arten der pythagoreischen 'Ακούσματα (Diels I³, 358, 16 f.) die beiden ersten: τὰ μὲν γὰρ αὐτῶν τί ἐστι σημαίνει, τὰ δὲ τί μάλιστα ...

[3]) Nämlich den Anzahlenverhältnissen (vgl. S. 40).

διακόσμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήρμοττον — 986 a 3—6). Sie taten es ihrem Grundsatz gemäß in dem Sinne, daß die πάθη und λόγοι der Anzahlen als Grundlage der Vergleichung dienten (Metaph. N 3, 1090 a 20—25). Gerade darin wurzelt die von Aristoteles gerügte „Oberflächlichkeit" ihrer Bestimmungen, denn hier genügte ihnen offenbar eine vage „strukturelle" Ähnlichkeit, um von einer „Nachahmung" der Anzahlen (Metaph. A 6, 987 b 11 f.; Theophr., Metaph. 11 a 27 f.) seitens der Dinge zu sprechen, so z. B. wenn sie im „Gerechten" die Wiedervergeltung und in dieser das „reziproke Verhältnis" erkannten und demzufolge das „Gerechte" als das „reziproke Verhältnis" „definierten" (Eth. Nic. E 8, 1132 b 21 ff., dazu Eukl. VI, Def. 2 und Nikom. 13, 18 f. — vgl. Magn. Mor. A 1, 1182 a 14: die δικαιοσύνη als „quadratische" Anzahl). Was die Definitionsweise der Pythagoreer kennzeichnet, ist also der Versuch einer Seinsbestimmung durch reduzierende Angleichung des zu definierenden Gegenstandes an Sachverhalte, die sich „primär" im Gebiet von Gezähltem als solchem aufweisen lassen[1]: damit wäre dann das Sein des betreffenden Gegenstandes als eine bestimmte Art von Anzahl bzw. von Anzahlbeziehung festgelegt. Aber dieses Verfahren läßt sich in der gleichen Richtung noch weiter fortsetzen: es gibt immer eine erste und „kleinste" Anzahl bzw. Anzahlbeziehung einer bestimmten Art, der also als erster die betreffende Arteigenschaft zukommt und die so gleichsam die „Stammwurzel", den πυθμήν dieser Art darstellt. Von hier aus bekommt die Zehn eine besondere Bedeutung, weil sie neben der Eins (wie die Griechen meinten: bei allen Völkern) als ein Grundelement aller Zählung anzusehen ist und die in ihr befaßten Anzahlen samt ihren gegenseitigen Beziehungen bereits selbst die wichtigsten πυθμένες bilden (vgl. in den Theol. arithm., De Falco, 82 ff. bzw. Diels I$^3$, 303 ff. das Fragment Speusipps über die Zehn, ferner Aetius I, 3, 8, Diels I$^3$, 349, 26 ff. bzw. Dox. gr. 281, Philolaos Fragm. 11, Diels I$^3$, 313, 5—9, ferner auch [Aristot.] Probl. IE 3, 910 b 23 ff., wo in bezug auf die Zählweise ein Thrakerstamm als einzige Ausnahme angegeben wird). Das Verfahren der angleichenden Seinsidentifikation erstreckt sich somit bis zu den Elementen der Zehn und wird von der späteren neupythagoreischen und neuplatonischen Tradition zum wichtigsten Lehrstück der „Arithmologie" ausgebaut, um einen hierfür geprägten modernen Ausdruck zu gebrauchen[2]). Aber bei alledem bleibt immer der kosmologische Gesichtspunkt maßgebend (vgl. besonders Aristot., Metaph. A 8, 990 a 18 ff.), d. h. die ständige Orientierung an der διακόσμησις oder τάξις des Alls. Die Zählbarkeit der Dinge, die allererst diese τάξις ermöglicht, wird im Horizont dieser Fragestellung selbst bereits als ein bestimmtes

[1]) Vgl. das Scholion zu Gorg. 451 A (Hermann VI, 300): πάντα γάρ ἐστι πρώτως ἐν τοῖς ἀριθμοῖς (dieser Satz schließt unmittelbar an den S. 28, Anm. 1, zitierten Text an).

[2]) S. A. Delatte, Études sur la littérature pythagoricienne, 1915, p. 139.

Geordnetsein der Dinge und dementsprechend die Aufeinanderfolge der Anzahlen als die Urordnung des Seins dieser Dinge verstanden. Die Aufeinanderfolge der Anzahlen stellt hier nicht eine lineare Reihe dar, deren Glieder ihrem Sein nach alle „gleichartig“ wären, sondern drückt eben eine „Ordnung“ in dem Sinne aus, daß die einzelnen Anzahlen ihrem Sein nach einander vor- bzw. nachgeordnet sind, zueinander also im Verhältnis des πρότερον und ὕστερον stehen (vgl. Aristot., Metaph. Δ 11, 1018b 26—29).

Die Wissenschaft der Pythagoreer ist somit eine Ontologie des Kosmos, eine Lehre von der Seinsweise der Welt und der in ihr befaßten Dinge. Das gilt insbesondere auch von ihrer „arithmetischen“ und „logistischen“ Wissenschaft, deren eigentlichen Gegenstand das Sein der Weltdinge selbst bildet (vgl. Archytas, Fragm. 1 u. 4 — Diels I³, 330f. u. 337; Philolaos, Fragm. 6 u. 11 — Diels I³, 310f. u. 313f.). Welche besonderen Motive zu einer solchen Konzeption auch geführt haben mögen — unter anderen wohl auch die Einsicht in die „logistische“ Bedingtheit der musikalischen Zusammenklänge[1] —, so ist sie doch überhaupt nur auf dem Grunde des oben gekennzeichneten „natürlichen“ ἀριθμός-Begriffs möglich. Nur wenn unter „Anzahlen“ Anzahlen von Dingen verstanden werden, nur wenn mit einer Anzahlenbestimmung das Gezählte selbst gemeint wird, ist es möglich, das dingliche Sein dieser Dinge als „Anzahl“ zu fassen. Als charakteristisch für die pythagoreische Auffassung betont Aristoteles immer wieder, daß sie die Anzahlen von den Dingen nicht ablösten (οὐ χωριστὸν ποιοῦσι τὸν ἀριθμόν), d. h. nicht so weit gingen, die Existenz „reiner“ Anzahlen von „reinen“ Einsen anzunehmen, obgleich sie es doch gerade waren, die mit den Anzahlen nicht in praktischer, sondern in theoretischer Absicht umgingen, den ἀριθμός also als ἀριθμὸς μαθηματικός begriffen (Metaph. M 6, 1080b 16ff.). Sie waren eben — wie Aristoteles (Metaph. A 8, 990a 3f.) sagt — mit den übrigen „Physiologen“ der Meinung, daß Seiendes nur soweit reicht, als es sinnlich Wahrnehmbares gibt, und sie bemühten sich, gerade die Seinsweise dieses Seienden als eine durch „Anzahl“ bestimmte zu erweisen, womit sie freilich auf dem Wege waren, eine Seinsweise höherer Ordnung zu erschließen. Man kann vermuten, daß sie den Vorgang der Weltentstehung als die fortschreitende Aufteilung einer ersten „ganzen“ Eins auffaßten, über deren Ursprung sie selbst, wie es scheint, nichts Endgültiges zu sagen vermochten (vgl. Metaph. M 6, 1080b 20f.; N 3, 1091a 15ff.), die aber für sie jedenfalls bereits die beiden Grundarten des Anzahlbereichs, nämlich das „Ungerade“ und das „Gerade“, als Grundbestandteile, als „Elemente“ — als „Grenze“ und „Unbegrenztes“ — in sich barg (vgl. Metaph. A 5, 986a 17ff. und Theon 22, 5ff.). So-

[1] Vgl. S. 40, Anm. 1 und S. 46.

wohl diese erste Eins als auch alle folgenden, durch deren Aufteilung sich ergebenden Einsen — d. h. die „Anzahlen“ selbst — besaßen also in ihren Augen körperliche Ausdehnung (τὰς μονάδας ὑπολαμβάνουσιν ἔχειν μέγεθος — Metaph. M 6, 1080b 19f.), was die Meßbarkeit der Dinge auf deren Zählbarkeit zu reduzieren gestattete — bis die Entdeckung „inkommensurabler“ Größen die Unmöglichkeit dieser Reduktion erwies.

Wie immer sie sich nun im einzelnen den Aufbau der Welt und der Weltkörper „aus Anzahlen“ (ἐξ ἀριθμῶν) dachten, in der Struktur des ἀριθμός-Begriffs lag für sie die Möglichkeit, nicht bloß die körperlichen Monaden als den jeweiligen „Stoff“, als das dingliche Sein der Dinge zu begreifen (was sie mit den Atomisten verbindet), sondern darüber hinaus in den Arteigenschaften der Anzahlen die Vorbilder zu erblicken, durch deren „Nachahmung“ die Dinge — dank dem Verfahren der angleichenden Seinsidentifikation — in ihrem Anzahlsein festgelegt werden konnten (vgl. Metaph. A 5, 986a 16f.: τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις. A 8, 990a 18f.: πῶς δεῖ λαβεῖν αἴτια μὲν εἶναι τὰ τοῦ ἀριθμοῦ πάθη καὶ τὸν ἀριθμόν . . .; N 6, 1093a 11f.: ταὐτὰ ἂν ἦν ἀλλήλοις ἐκεῖνα τὸ αὐτὸ εἶδος ἀριθμοῦ ἔχοντα. Philolaos, Fragm. 5, Diels I³, 310, 13f.: in bezug auf die εἴδη des Ungeraden, Geraden und Geradungeraden — ἑκατέρω δὲ τῶ εἴδεος πολλαὶ μορφαί, ἃς ἕκαστον αὐταυτὸ σημαίνει). Was das Philolaosfragment anbelangt, so ist — wenn man von dem verderbten Schluß absieht — jedenfalls klar, daß unter den μορφαί der εἴδη deren Unterarten zu verstehen sind, bestimmte Artbeschaffenheiten oder Arteigenschaften also, von denen Boeckh[1]) bemerkt, daß sie „die alten Arithmetiker mit besonderem, uns freilich kleinlich vorkommenden Fleiß entwickelt“ hätten. Die Bedeutung dieser πάθη oder μορφαί oder εἴδη der Anzahlen ist auch seit Boeckh kaum genügend gewürdigt worden. Dabei bilden, wie wir gesehen haben, die εἴδη der Anzahlen und Anzahlenbeziehungen — zusammen mit den korrelativen πυθμένες — nicht nur den eigentlichen Gegenstand der griechischen Arithmetik, sondern auch die Grundlage der kosmologischen Spekulation, wie sie von den Pythagoreern eingeleitet und durch die Jahrhunderte hindurch bis zu Kepler fortgeführt wird. Wir werden insbesondere noch zu betrachten haben, welche Rolle diesem εἶδος-Begriff in der Mathematik Vietas zukommt[2]).

---

[1]) Philolaos des Pythagoreers Lehren, 1819, S. 60.—Bereits Heeren deutete die μορφαί im oben angegebenen Sinne (vgl. auch Frank, aaO., S. 307, Anm. 1).

[2]) Übrigens ist auch das Verfahren des Eurytos, wie es von Aristoteles (Metaph. N 5, 1092 b 8ff.) und von Theophrast (Metaph. 6a 19ff.) beschrieben wird, nur im Hinblick auf ein jeweils bestimmtes Anzahlen-εἶδος sinnvoll. — Eine genauere Darstellung der pythagoreischen Wissenschaft muß einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben.

B. Die Mathemathik bei Plato. — λογιστική und διάνοια.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Philosophie Platos von der pythagoreischen Wissenschaft her entscheidende Impulse erhält, wie immer man sich den Zusammenhang, der zwischen Plato und den „Pythagoreern“ besteht, im einzelnen vorstellen mag. Auch jene Definitionen der Arithmetik und der Logistik, die den bisherigen Überlegungen zugrunde lagen, scheinen auf einen pythagoreischen Ursprung hinzudeuten. Wir sahen (S. 63f.), daß sie keineswegs das Vorhandensein „reiner“ Anzahlen voraussetzen, sich vielmehr auf alles Zählbare als solches beziehen, also doch wohl zunächst die sinnlich wahrnehmbaren Dinge dieser Welt betreffen. Die beiden Wissenschaften scheinen hier gerade in ihrer kosmologischen Bedeutung erfaßt zu werden, zumal wir daran denken müssen, daß die πρώτιστα εἴδη der Anzahlen, das „Ungerade“ und das „Gerade“, für die Pythagoreer die „Grenze“ und das „Unbegrenzte“, also die ἀρχαί alles Seienden darstellten, deren Zusammentreten, deren „Mischung“ das Sein dieser Welt überhaupt erst bewirkt. Diese Anschauung, die in die Kosmologie des „Philebos“ und des „Timaios“ eingeht, hängt unmittelbar mit der allgemeinen Gegensatzlehre der Pythagoreer zusammen (vgl. insbesondere die Tafel der Gegensätze bei Aristoteles, Metaph. A 5, 986a 22ff.). So ist auch im „Charmides“ die Symmetrie nicht zu übersehen, die zwischen den Gegensatzpaaren ἄρτιον — περιττόν, βαρύ — κοῦφον (166 B) und ἀνεπιστημοσύνη — ἐπιστήμη (166 E) besteht. Und auch im „Gorgias“ tritt dem Gegensatz des περιττόν und des ἄρτιον jener andere der δίκαια und der ἄδικα zur Seite (454 B)[1]. Hier, im „Charmides“ und im „Gorgias“, wird also der Gegenstand der Arithmetik und Logistik ontologisch wohl nicht anders als bei den Pythagoreern begriffen (vgl. S. 69). Dennoch besteht zwischen der pythagoreischen Wissenschaft und der platonischen Philosophie eine unaufhebbare Spannung, die sich innerhalb des platonischen Werkes selbst in dem Gegensatz des sokratischen Dialogs und des den Kosmos darstellenden εἰκὼς μῦθος auswirkt. Es gibt freilich für Plato einen δεσμός, der die Dialektik und die Kosmologie miteinander verbindet und beiden damit entscheidende Züge verleiht. Dieses Band ist die Mathematik. Ihre fundamentale Bedeutung für Plato liegt gerade in ihrer „Mittelstellung“, in ihrem δεσμός-Charakter beschlossen. Aber eben diese „vermittelnde“ Rolle der Mathematik bei Plato weist ihren Gegenständen eine ganz andere Stellung, eine ganz andere Seinsweise zu, als sie innerhalb der pythagoreischen Mathematik möglich wäre. Was insbesondere die Anzahlen betrifft, so wird Aristoteles nicht müde zu betonen, daß Plato sie — im Gegensatz zu den Pythagoreern — von den sinnlich wahr-

[1]) Vgl. auch Theon 106, 7ff. = Diels, I³, 337, 15ff.

nehmbaren Dingen „ablöste", so daß sie neben diesen Dingen (παρὰ τὰ αἰσθητά) als ein besonderer Bereich von Seiendem erscheinen. Diesen Bereich stellt, wie wir gesehen haben, das Feld der „reinen", nur dem Verstande zugänglichen, unteilbaren und gleichartigen Einsen dar. Der neue Gesichtspunkt, von dem aus Plato sich der mathematischen Forschung zuwendet, sein allgemeines Interesse an der Überordnung des rein Noetischen über alles Somatische erklären zur Genüge den Nachdruck, den er auf das Vorhandensein der „reinen", den Sinnen entzogenen Anzahlen legt. Doch ist es nicht unwichtig zu bemerken, daß die betonte Herausstellung der „reinen" Monaden gerade die Selbstverständlichkeit anzeigt, mit der die ἀριθμοί gemeinhin nur als Anzahlen von bestimmten greifbar-sinnlichen Dingen verstanden werden. Der Gedanke an irgendwelche „reinen", von allem Körperlichen abgelösten Anzahlen liegt zunächst so fern, daß sich für den Philosophen gerade die Aufgabe ergibt, das Selbständig- und Abgelöstsein der Monaden mit besonderem Nachdruck herauszuheben und gegen alle Zweifel zu sichern. Die Lösung dieser Aufgabe ist durch den Weg vorgezeichnet, der von unserem faktischen Zählen und Rechnen zur Konzeption der „reinen" Monaden führt (S. 55f.). Wenn wir uns Rechenschaft von diesem Wege geben, begreifen wir, daß es sich auf diesem Wege um die Begründung der Möglichkeit unseres täglich geübten Zählens und Rechnens handelt: daß wir eine bestimmte Menge von sinnlich wahrnehmbaren Dingen abzählen können, ist begründet in der Existenz „unsinnlicher" Monaden, die gerade zu der betreffenden Anzahl zusammengefügt werden können und die unser Verstand, unsere διάνοια, eigentlich meint, wenn er irgendwelche sinnlich wahrnehmbaren Dinge zählt oder berechnet. Nun ist aber dasjenige, das für ein Anderes (in unserem Fall: die gewöhnlichen Anzahlen) den Grund abgibt, das Sein dieses Anderen überhaupt erst ermöglicht, auch bedeutsamer, seinsmächtiger als dieses Andere. Das Sein des Begründenden ist dem Sein des Begründeten vorgeordnet (πρότερον), weil das Zweite ohne das Erste nicht sein kann, wohl aber das Erste ohne das Zweite. So wird die besondere Seinsart der Anzahlen von „reinen" Monaden zunächst von ihrer begründenden Rolle her faßbar: sie wird als ein ursprüngliches, im Begründungsverhältnis wurzelndes Selbständig- und Abgelöstsein bestimmt — ein für Plato (und allen späteren Platonismus) charakteristisches Verfahren. Aristoteles bezeugt es, wenn er bei der Auseinanderlegung der verschiedenen Bedeutungen des πρότερον und ὕστερον (Metaph. Δ 11) von der oben angegebenen ausdrücklich bemerkt, daß Plato von ihr „Gebrauch gemacht" habe (ᾗ διαιρέσει ἐχρήσατο Πλάτων — 1019 a 2—4), was doch wohl so viel besagen soll, daß sie für Plato besonders bezeichnend sei, daß sie für ihn eine wesentliche Rolle spiele. In der

Tat hängt sie ja unmittelbar mit der vielerörterten „Hypothesis"lehre Platos zusammen, auf die einzugehen angesichts des Gegenstandes dieser Arbeit auch für uns unerläßlich ist.

Das gesamte Gebiet des dem Verstande Zugänglichen, des νοητόν, teilt Plato im Staat (510 B ff.) in zwei Bereiche ein, von denen der eine durch folgende Darlegungen charakterisiert wird. Es gibt sinnlich Wahrnehmbares, das wir als Abbild eines „Anderen" verstehen, indem die betrachtende Seele genötigt wird, dieses „Andere" — eben das in Frage stehende νοητόν — dem sinnlich Wahrnehmbaren „unterzulegen" (τὸ μὲν αὐτοῦ [sc. τοῦ νοητοῦ] . . . ψυχὴ ζητεῖν ἀναγκάζεται ἐξ ὑποθέσεων — 510 B). Wir betrachten dann zwar mit den Sinnen bestimmte Dinge, meinen aber nicht diese Dinge, sondern das, was ihre „Grundlage" ausmacht und sich ihnen abbildet. Dieses Zugrundegelegte und Sich-Abbildende ist als solches Gegenstand der διάνοια (510 D, E). Und das Ergebnis des jeweiligen διανοεῖσθαι bzw. λογισμός ist das Verständnis bestimmter Eigentümlichkeiten der mit den Sinnen wahrgenommenen Dinge — ein Verständnis aus dem Grunde dieser Dinge.

So verfahren vor allem die Geometer und die Logistiker (510 C). Die ersteren zeichnen gewisse Figuren und zeigen deren Eigentümlichkeiten auf, aber sie meinen nicht die jeweils gezeichnete Figur selbst, sondern das in dieser Figur sich Abbildende, z. B. das in seiner „Reinheit" nur dem Verstande zugängliche Rechteck. Dabei ist aber für das Verständnis der in Frage kommenden Sachverhalte der ständige Bezug auf das gezeichnete Dreieck durchaus notwendig. — Ebenso haben die Logistiker das „Ungerade" und das „Gerade" in Gestalt irgendwelcher zählbarer Dinge vor Augen, an denen sie ihre Überlegungen durchführen, aber diese Überlegungen betreffen — als Überlegungen des Verstandes — nicht diese bestimmten Dinge, sondern die diesen Dingen vom Verstande zugrunde gelegten und sich in ihnen abbildenden „reinen" Anzahlen bzw. deren εἴδη. Auch hier ist freilich der Bezug auf die den Sinnen zugänglichen Mengen notwendig, und seien es auch nur im Sande vermerkte „Zeichen" oder Punkte.

So ist an dem Verfahren der Geometer und Logistiker die Wirksamkeit der διάνοια unmittelbar einsichtig. Aber was bedeutet die besondere Bezogenheit der διάνοια auf die der Geometrie und Logistik zugehörigen Bereiche? Es ist doch keineswegs so, daß die διάνοια auf diese Bereiche allein beschränkt wäre[1]). In allem menschlichen Tun und Sichzurechtfinden kommt ihr offensichtlich ein wesentlicher, ja vielleicht der wesentlichste Anteil zu. Man darf nicht übersehen, daß es sich bei dem von Plato herausgehobenen Verfahren der „Hypothesis" nicht etwa um eine

[1]) Vgl. J. C. Wilson, aaO., S. 258.

spezifisch „wissenschaftliche“ Methode handelt, sondern um ein ursprüngliches, aller Wissenschaft vorausliegendes Verhalten der menschlichen Überlegung, wie es sich unmittelbar in der die Dinge aufweisenden und über sie urteilenden Rede kundgibt[1]). So bedeutet gegenüber der Naturbetrachtung der Physiologen jener δεύτερος πλοῦς des Sokrates, nämlich das εἰς τοὺς λόγους καταφυγεῖν (Phaid. 99 E), in der Tat nichts anderes als die Rückkehr zum gewöhnlichen Verhalten der διάνοια, und daher kann Plato das „Hypothesis“-Verfahren als ἁπλῶς καὶ ἀτέχνως καὶ ἴσως εὐήθως (Phaid. 100 D) charakterisieren[2]). Im Vollzuge des von der διάνοια geleiteten Sprechens legen wir ständig den wahrgenommenen Dingen etwas „anderes“ zugrunde, nämlich lauter νοητά, die wir freilich immer nur gleichsam im Spiegel der Sinne betrachten, ohne daß uns dieses natürliche Verhalten als solches offenkundig wäre. Nun aber gibt es eine bevorzugte Weise des Überlegens, bei der dieses Verhalten zum Range eines bewußt geübten Verfahrens erhoben wird — wodurch allererst Wissenschaft und Kunstfertigkeit jeder Art entstehen können (vgl. Phileb. 16 C). Denn alle Wissenschaft und alle Kunstfertigkeit erwächst aus dem natürlichen Verhalten der Überlegung, indem dieses Verhalten den Charakter einer ausgebildeten, bestimmten Regeln gehorchenden τέχνη erlangt. Die damit durchsichtig werdenden und also erlernbaren „Kunstgriffe“ der διάνοια erheben zur vollen Ausdrücklichkeit, was von der διάνοια vor aller Wissenschaft faktisch immer schon geleistet wird. Umgekehrt kann man nun aber von dieser Einsicht aus verstehen, worin eigentlich jene gewöhnliche Leistung der διάνοια besteht. Gerade an den am meisten ausgebildeten τέχναι, an der Meßkunde und vor allem an der Zähl- und Rechenkunde, d. i. jenem κοινόν, ᾧ πᾶσαι προσχρῶνται τέχναι τε καὶ διάνοιαι καὶ ἐπιστῆμαι (Staat 522 C), ohne welches jede τέχνη ihren τέχνη-Charakter überhaupt verliert (Phileb. 55 E — vgl. Staat 602 D), kann man den eigentlichen Sinn der διάνοια ergreifen. Das eben bedeutet die Zuordnung der διάνοια zu den Bereichen der Geometrie und der Logistik: es sind die Bereiche, in denen ihre Tätigkeit vorbildlich ist. Daß aber das Verhalten der gewöhnlichen διάνοια in der Tat auf die Kenntnis gerade logistischer Sachverhalte zurückweist, ist an der Argumentation abzulesen, die im „Staat“ die führende Stellung der mathematischen Fächer, insbesondere der Zähl- und Rechenkunde, begründet.

---

[1]) Die enge Beziehung der διάνοια zum λόγος zeigt z. B. Soph. 263 E: ΞΕ. Οὐκοῦν διάνοια μὲν καὶ λόγος ταὐτόν· πλὴν ὁ μὲν ἐντὸς τῆς ψυχῆς πρὸς αὑτὴν διάλογος ἄνευ φωνῆς γιγνόμενος τοῦτ᾽ αὐτὸ ἡμῖν ἐπωνομάσθη, διάνοια; ΘΕΑΙ. Πάνυ μὲν οὖν. Vgl. ferner Theaet. 206 C, D: der λόγος als τὸ τὴν αὑτοῦ διάνοιαν ἐμφανῆ ποιεῖν διὰ φωνῆς μετὰ ῥημάτων τε καὶ ὀνομάτων, und 208 C: διανοίας ἐν φωνῇ ὥσπερ εἴδωλον. Auch 189 E.

[2]) Vgl. hierzu H. G. Gadamer, Platos dialektische Ethik. Phänomenologische Interpretationen zum „Philebos“, 1931, S. 56 ff.

Es gibt danach Wahrgenommenes, das die wahrnehmende Seele unmittelbar befriedigt, weil hier von sich aus alles genügend klar ist und also keinerlei Notwendigkeit vorliegt, über die Wahrnehmung hinaus an eine andere Instanz zu appellieren: es liegt keine Notwendigkeit vor, über die betreffenden Wahrnehmungen noch irgendwelche Überlegungen anzustellen (τὰ μὲν ἐν ταῖς αἰσθήσεσιν οὐ παρακαλοῦντα τὴν νόησιν εἰς ἐπίσκεψιν, ὡς ἱκανῶς ὑπὸ τῆς αἰσθήσεως κρινόμενα — 523 A, B). Es gibt aber auch Wahrgenommenes, das die wahrnehmende Seele notwendig in Unklarheit darüber läßt, was es denn nun sei, und also notwendig die Überlegung zu Hilfe ruft, um darüber zu befinden. Und zwar ist hier die Unklarheit des Wahrgenommenen nicht etwa von der Art, daß sie in einer besseren und schärferen Wahrnehmung verschwinden könnte, dadurch etwa, daß der Gegenstand der Wahrnehmung den Sinnen nähergerückt würde (522 B). Diese Unklarheit ist vielmehr in der Struktur des Wahrgenommenen selbst begründet, sofern dasselbe Wahrgenommene in derselben Wahrnehmung auch als das ihm Entgegengesetzte erscheinen kann (ἐπειδὰν ἡ αἴσθησις μηδὲν μᾶλλον τοῦτο ἢ τὸ ἐναντίον δηλοῖ — 523 C). Wenn ich z. B. die Finger an meiner Hand betrachte, so nehme ich jeden dieser Finger unmittelbar als Finger wahr. Und mit dem schlichten Wahrnehmen hat es in diesem Fall sein Bewenden: in dieser Wahrnehmung ist nichts „problematisch“, sie ist in sich abgeschlossen, sie hinterläßt nicht das Gefühl einer Unklarheit, das meine Überlegung dazu bewegen könnte, weiter nachzuforschen, was es mit dem Finger eigentlich auf sich habe, was denn nun der Finger sei (523 D). Ganz anders, wenn ich die Beschaffenheit jedes dieser Finger wahrnehme, etwa seine Größe oder Dicke oder Weichheit. Ich nehme in solchen Fällen zugleich auch das Entgegengesetzte an ihm wahr: seine Kleinheit, seine Dünne, seine Härte. Ich nehme also in derselben Wahrnehmung Entgegengesetztes — z. B. Weichheit und Härte oder Größe und Kleinheit — als dasselbe Wahrgenommene wahr. Hier „vermischt“ sich etwas in undurchsichtiger Weise, was offenbar nicht zusammengehört — wie mir meine Überlegung sofort sagt. Um über die Schwierigkeit hinwegzukommen, um klar zu sehen, bin ich ja eben genötigt, über die „bloße“ Wahrnehmung hinauszugreifen und in mir die Überlegung (λογισμόν τε καὶ νόησιν — 524 B) „herbeizurufen“ und zu „erwecken“[1]. Im Anschluß an die Wahrnehmung tritt hier die Überlegung gleichsam von selbst in Tätigkeit. Sie sagt mir, daß es sich hier um zweierlei handelt, nämlich um Weichheit einerseits, um Härte andererseits und ebenso um Größe einerseits, um Kleinheit andererseits. Sie läßt mich beides als „zwei“, als dieses Eine — Weichheit bzw. Größe — und

[1] Vgl. die Schiedsrichterrolle des Sokrates im Laches 184 D.

dieses andere Eine — Härte bzw. Kleinheit —, nicht mehr miteinander „vermischt", sondern voneinander getrennt erkennen (ἓν ἑκάτερον, ἀμφότερα δὲ δύο, τά γε δύο κεχωρισμένα νοήσει . . . οὐ συγκεχυμένα ἀλλὰ διωρισμένα — 524 B, C).

Auf welchem Wege gelangt aber die Überlegung dazu, das undurchsichtig „Vermischte" zu sondern? Offenbar auf dem Wege des Vergleichs. Die Überlegung belehrt mich darüber, daß der Finger klein ist im Vergleich zu seinem linken Nachbarn und daß derselbe Finger groß ist im Vergleich zu seinem rechten Nachbarn. Oder, wie es im Phaidon (102 B, C) heißt, Simmias ist groß nicht insofern er Simmias ist, sondern insofern er mit Sokrates verglichen werden kann. Derselbe Simmias ist andererseits klein, wiederum nicht insofern er Simmias ist, sondern insofern er mit Phaidon verglichen werden kann. Und umgekehrt: Sokrates ist klein, weil er Kleinheit hat in bezug auf die Größe des Simmias (ὅτι σμικρότητα ἔχει ὁ Σωκράτης πρὸς τὸ ἐκείνου μέγεθος) und Phaidon ist groß, weil er Größe hat in bezug auf die Kleinheit des Simmias (ὅτι μέγεθος ἔχει ὁ Φαίδων πρὸς τὴν Σιμμίου σμικρότητα). Die Größe und die Kleinheit eines Gegenstandes also kann die Überlegung als zweierlei nur dann erkennen, wenn sie einmal sein Größer-sein-als . . . und ein anderes Mal sein Kleiner-sein-als . . . erkennt. Erst die Beziehung des Einen zum Anderen ermöglicht es der διάνοια, einem „Vermischten", das sich den Sinnen aufdrängt, zwei distinkte Gebilde zugrunde zu legen.

Die Gegenstände der διάνοια — die erste Art von νοητά — ergeben sich also dadurch, daß das den Sinnen Zugängliche kraft seiner „Bezüglichkeit" (Natorp) als ein Vielfältiges erkannt wird. Die Erkenntnis des Vielen als Vielen — und damit auch des Anderen als Anderen — heißt aber nichts anderes, als daß die einzelnen Bestandteile des Vielen voneinander gesondert und in der Sonderung zugleich aufeinander bezogen werden. Die διάνοια bewegt sich im ständigen Durchmustern und Vergleichen der vielen Hinsichten, die ihr die αἴσθησις darbietet. So stehen auch die νοητά, zu denen sie gelangt, und die sie dem jeweils undurchsichtigen αἰσθητόν zugrunde legt, in Beziehung zueinander. Die διάνοια richtet sich niemals auf einen einzigen Punkt, auf ein einzelnes Seiendes als solches, sondern ihr Blick umfaßt immer eine Reihe von Seienden, derart, daß die einzelnen Glieder dieser Reihe genau voneinander unterschieden und damit zugleich aufeinander bezogen sind.

So zeigt sich, daß die διάνοια wesentlich auf dem λογίζεσθαί τε καὶ ἀριθμεῖν beruht[1]), auf dem Vermögen nämlich, Vieles als So-vieles zu

[1]) Vgl. Stenzel, Zahl und Gestalt¹, S. 22, 44 f. — S. auch „Staat" 602 D—E. (Daher auch der Zusammenhang zwischen der περὶ τοὺς ἀριθμοὺς διατριβή und der „Schärfung" des Verstandes — Gesetze V, 747 B; Staat VI, 526 B.)

erkennen, und also zunächst Vieles überhaupt als Vieles zu sehen, d. h. die Bestandteile des Vielen voneinander zu sondern und zugleich aufeinander zu beziehen (s. oben S. 32). Deshalb führt im „Staat" die Erörterung des Fingerbeispiels unmittelbar dazu, die Frage nach „Anzahl" und nach dem „Einen" zu stellen (Τί οὖν; ἀριθμός τε καὶ τὸ ἓν πότερον δοκεῖ εἶναι; — 524 D). Glaukon wird aufgefordert, die Antwort aus dem Vergleich mit dem eben Gesagten zu gewinnen (ἐκ τῶν προειρημένων . . . ἀναλογίζου). Wenn nämlich die Wahrnehmung eines Gegenstandes als eines zugleich die Wahrnehmung eines Gegensätzlichen (ἐναντίωμα) einschließt, in dem Sinne, daß derselbe Gegenstand ebensogut als einer wie als das Gegenteil von einem erscheint (ὥστε μηδὲν μᾶλλον ἓν ἢ καὶ τοὐναντίον φαίνεσθαι — 524 E), so muß hier ebenfalls die διάνοια eingreifen, um das „Hindernis" zu beseitigen und die betrachtende Seele zur Klarheit (σαφήνεια) über das „Eine" gelangen zu lassen. Nun ist — wie Glaukon sofort bemerkt — dies in der Tat der Fall: „denn wir sehen denselben Gegenstand zugleich als Eines und als ein der Menge nach unbegrenzt Vieles" (ἅμα γὰρ ταὐτὸν ὡς ἕν τε ὁρῶμεν καὶ ὡς ἄπειρα τὸ πλῆθος — 525 A)[1]). Wenn dies aber von einem Gegenstand gilt, so gilt es auch von schlechthin jeder Anzahl von Gegenständen (ξύμπας ἀριθμός), weil eben „Anzahl" eine begrenzte Menge von gegenständlichen Einheiten darstellt[2]). Indem also die διάνοια genötigt wird, das Eine als solches, die Eins selbst (αὐτὸ τὸ ἕν) von ihrem Gegenteil, dem unbegrenzt Vielen, zu sondern — dadurch nämlich, daß sie die verschiedenen Hinsichten unterscheidet, die den einen Gegenstand als Vieles anzusprechen gestatten —, entdeckt sie die Eins selbst nicht für sich allein, sondern unter **vielen Einsen**, setzt sie die eine Eins mit anderen Einsen in Beziehung, tut also nichts anderes als — zählen. Dieser Vorgang ist durchaus alltäglicher Art. In allen Verrichtungen des Lebens sind wir auf ein solches Eingreifen der διάνοια angewiesen. Doch ist bereits damit der Weg der „Forschung über das Eine" (ἡ περὶ τὸ ἓν μάθησις) beschritten. Von der διάνοια geleitet, wendet

[1]) Der Gegensatz, von dem hier (wie auch im Phaidon 102 B, wo Simmias zugleich groß und klein erscheint) die Rede ist, läßt sich freilich leicht auflösen. Denn es sind durchaus verschiedene Hinsichten, in denen der Finger als Eines und in denen er als Vieles angesprochen wird. Es ist die elementarste Form des „Eins und Vieles"-Problems (vgl. Phileb. 14 C, D), das erst im Bereiche der νοητά selbst seine ganze Schwere und seine ganze Tragweite erlangt (Phileb. 14 E ff.). Dennoch ist eben schon in dieser elementaren und leicht durchschaubaren Form, die den Glaukon — wie im Philebos den Protarchos — auch sofort an die bekannte Fragestellung erinnert, der Gegensatz fühlbar genug, um die διάνοια in Tätigkeit zu setzen — und darauf allein kommt es in diesem Zusammenhang an (vgl. auch Parm. 129 f. und Soph. 251 B, C).

[2]) Es ist zu beachten, daß auch hier, wie im Philebos 16 C—E, der ἀριθμός „zwischen" dem ἓν und der ἀπειρία steht (dazu auch Soph. 256 E 5 f.).

die Seele ihre Aufmerksamkeit diesem ihrem Wege zu (κινοῦσα ἐν ἑαυτῇ τὴν ἔννοιαν), entdeckt in einem Felde unbegrenzt vieler und gleichartiger „reiner" Einsen die „reinen" Anzahlen dieser Einsen, erhebt ihre eigene beziehende Tätigkeit zur vollen Ausdrücklichkeit, indem sie die Verhältnisse dieser Anzahlen zueinander prüft (womit sie u. a. die Möglichkeit des Rechnens begründet), „unterlegt" den sinnlich wahrnehmbaren Dingen die εἴδη dieser Anzahlenverhältnisse sowie die der Anzahlen selbst, zu oberst das „Ungerade" und das „Gerade" (ὑποθέμενοι τό τε περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον . . . — 510 C) — vermag aber mit alledem nicht, die Eins selbst so, wie sie in sich selbst ist, zu Gesicht zu bekommen. Denn die διάνοια hat es ja ständig mit einer Menge von Einsen zu tun, sie kann die Eins überhaupt gar nicht anders als von einer Gesamtheit von Einsen aus fassen, wie sie auch weder ein Element der Sprache, einen einzelnen durch einen Buchstaben wiederzugebenden Laut ohne die übrigen Laute (Phileb. 18 C) noch einen einzelnen Ton ohne die übrigen Töne erkennen kann. Sie kann es nicht, weil sie — obzwar auf νοητά gerichtet — doch immer auf die αἴσθησις bezogen bleibt, durch die sie ja zur Klärung eines undurchsichtigen Sachverhalts „herbeigerufen" wird. Diese Klärung vollzieht die διάνοια, indem sie den der Unklarheit des jeweiligen αἰσθητόν zugrunde liegenden Gegensatz als solchen durchschaut. Denn die Erkenntnis des Gegensatzes als Gegensatzes ist die eigentliche Funktion der διάνοια. So gelangt sie auch zunächst immer zu noetischen Gebilden von gegensätzlichem Charakter: zum „Sein" und zum „Nichtsein," zur „Ähnlichkeit" und zur „Unähnlichkeit," zum „Selbigen" und zum „Anderen," zur „Eins" und zur „Anzahl" (Theaet. 185 C, D: Οὐσίαν λέγεις καὶ τὸ μὴ εἶναι, καὶ ὁμοιότητα καὶ ἀνομοιότητα, καὶ τὸ ταὐτόν τε καὶ τὸ ἕτερον, ἔτι δὲ ἕν τε καὶ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν περὶ αὐτῶν)[1] und ebenso zum „Schönen" und zum „Häßlichen," zum „Guten" und zum „Üblen" (186 A). Sie bewegt sich also von vornherein im Gebiet des Gegensätzlichen und, indem sie in diesem Gebiet ihre „Vergleichungen" (ἀναλογίσματα — Theaet. 186 C) anstellt, findet sie als dessen eigentliche „Grundlage" den Bereich der „reinen" Anzahlenverhältnisse (der λόγοι bzw. ἀναλογίαι der „reinen" Anzahlen), sofern jede mögliche Beziehung, jeder mögliche Vergleich erst durch diese begründet werden. Aber auch hier bleibt sie ja auf die αἴσθησις angewiesen (vgl. S. 73) — was selbst noch, wie wir hinzufügen müssen, für die allgemeine Proportionenlehre gilt —, weil ihre Leistung eben immer einen „hypothetischen" Charakter hat. Sie ist wohl imstande, das dem Gebiet der αἰσθητά anhaftende „Mehr und Weniger" (τὸ μᾶλλον καὶ

[1]) Theaetet fügt ausdrücklich hinzu: δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἄρτιόν τε καὶ περιττὸν ἐρωτᾷς καὶ τἆλλα ὅσα τούτοις ἕπεται . . . (vgl. S. 71). 185 B heißt es übrigens genau wie im Staat 524 B (s. oben S. 76): (διανοῇ) καὶ ὅτι ἀμφοτέρω δύο, ἑκάτερον δὲ ἕν.

τὸ ἧττον)[1]) durch genaue Anzahlenverhältnisse zu „ersetzen“ und so den wichtigsten Schritt zur Gewinnung der wahren ἐπιστήμη zu vollziehen, die von der αἴσθησις gar keinen Gebrauch mehr macht und deren Gegenstand der Bereich jener anderen bis zum ἀνυπόθετον hinaufreichenden νοητά bildet (Staat 510 B, 511 B). Aber die διάνοια selbst vermag diese ihre eigene Leistung in ihrer ganzen Tragweite gar nicht zu würdigen, weil ihr ihre eigenen νοητά, die sie den αἰσθητά „unterlegt“, völlig durchsichtig und keiner weiteren Begründung bedürftig erscheinen. Und doch muß diese Jagdbeute der διάνοια, wie sie sie vor allem die Mathematiker heimbringen, erst den Dialektikern zum richtigen Gebrauch übergeben werden (Euthyd. 290 C; Staat 531 C — 534 E). Erst die Dialektik erschließt den Bereich des eigentlich Seienden, begründet die Möglichkeiten der διάνοια und zeigt das Sein und die Eins und das Gute wie sie — allem Gegensatz entzogen — in sich selbst, in Wahrheit sind.

### C. Der ἀριθμὸς εἰδητικός.

Im Großen Hippias kommt folgende merkwürdige Tatsache ausführlich (300 A — 302 B) zur Sprache: während im allgemeinen eine Eigenschaft, die gemeinsam mehreren Dingen zukommt, auch jedem einzelnen dieser Dinge zugesprochen werden muß (ὃ καὶ ἀμφοτέραις αὐταῖς [hier der ἀκοή und der ὄψις] ἔπεστι κοινῇ καὶ ἑκατέρᾳ ἰδίᾳ), gibt es ein κοινόν von der Art, daß es zwar mehreren Dingen zukommt, aber jedem dieser Dinge für sich genommen nicht. Hippias hält diesen Sachverhalt zunächst für völlig unmöglich. Er weist darauf hin (300 E — 301 A), daß wenn von ihm, Hippias, und von Sokrates etwas ausgesagt wird, was von beiden gilt, daß sie beide etwa gerecht, gesund, verwundet, golden, silbern usf. wären (ἀμφότεροί ἐσμεν), dann auch notwendig (μεγάλη ἀνάγκη) jede dieser Eigenschaften jedem von ihnen zukommen müsse. Ja, er erhebt an dieser Stelle (301 B, C) gegen Sokrates und gegen die, mit denen Sokrates zu reden pflegt (ἐκεῖνοι, οἷς σὺ εἴωθας διαλέγεσθαι), den schwerwiegenden Vorwurf, daß sie die „Ganzheiten“ der Dinge (τὰ ὅλα τῶν πραγμάτων) nicht in den Blick bekommen, daß sie vielmehr in ihren Reden das Schöne und jegliches Seiende einzeln herannehmen und es so lange beklopfen, bis sie es aufgeteilt haben (κρούετε δὲ ἀπολαμβάνοντες τὸ καλὸν καὶ ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν τοῖς λόγοις κατατέμνοντες). Hippias selbst ist offenbar weit davon entfernt, die Tragweite dieses Vorwurfs zu verstehen: handelt es sich doch um nichts Geringeres als um die Aporie des „Parmenides“ (130 E—131 E) und des „Philebos“ (15 B 4 — 8), wie es nämlich möglich sei, daß eine Idee in ihrer Einheit und Ganzheit sich auf die vielen Dinge „verteile,“ die an ihr „teilnehmen“. Die so

[1]) Über den Zusammenhang zwischen dem μᾶλλον καὶ ἧττον und der ἐναντίωσις vgl. Aristot., Phys. E 2, 226 b 7 f., ferner Plato, Staat 479 B u. 602 D ff.

formulierte Aporie stellt freilich das Problem der μέθεξις nur in der Ebene der διάνοια dar und erlangt ihre ganze Schärfe und Dringlichkeit erst angesichts des Verhältnisses einer übergeordneten Idee zu den ihr untergeordneten Ideen, einer „Gattung" zu ihren „Arten", — also erst im Bereich der Ideen selbst. Denn so, wie sich die elementare Form des „Eins und Vieles"-Problems (s. S. 77, Anm. 1) zum dianoetischen Methexisproblem verhält, so verhält sich dieses zum ontologischen Problem der Ideen-„Gemeinschaft"[1]). Doch ist Hippias nicht einmal imstande, den Sinn des dianoetischen Methexis-Problems zu erfassen, da sein Vorwurf im vorliegenden Fall weit eher ihn selbst als Sokrates trifft. Beschämt muß er dann im folgenden zugestehen, daß es ein κοινόν der fraglichen Art tatsächlich gibt: Sokrates und Hippias sind beide zusammen zwei, und doch ist jeder von ihnen nicht zwei, sondern nur einer; und umgekehrt: was jeder von ihnen ist, nämlich einer, das sind sie beide zusammen nicht (... ἑκάτερος ἡμῶν εἷς ἐστί, τοῦτο δέ, ὃ ἑκάτερος ἡμῶν εἴη, οὐκ ἄρα εἴημεν ἀμφότεροι· οὐ γὰρ εἷς ἐσμέν, ἀλλὰ δύο). Damit ist zugleich auch gegeben, daß beide zusammen eine gerade Anzahl ausmachen, während jeder von ihnen einzeln genommen „ungerade" ist (vgl. Phaidon 103 ff.). Sokrates beschließt diese Auseinandersetzung mit den Worten: „Also ist es nicht unter allen Umständen notwendig, wie du nun eben sagtest, daß was beide sind, auch jeder der beiden sei, und was jeder ist, auch beide seien" (οὐκ ἄρα πᾶσα ἀνάγκη, ὡς νῦν δὴ ἔλεγες, ἃ ἂν ἀμφότεροι, καὶ ἑκάτερον, καὶ ἃ ἂν ἑκάτερος, καὶ ἀμροτέρους εἶναι). Und auf die letzte rechthaberische Ausflucht des Hippias, dies gelte zwar nicht für „solche Dinge" (τὰ τοιαῦτα), aber doch für all das, was er vorhin vorgebracht habe, erwidert Sokrates, das genüge ihm, er sei auch damit zufrieden. Ein wenig später (303 A ff.) ergibt sich dann endlich, daß in den Bereich der von Sokrates gemeinten κοινά — neben dem ἑκάτερον und dem ἀμφότερον selbst — auch gewisse „irrationale" Größen fallen, die zusammengenommen eine „rationale" Größe ergeben[2]), καὶ ἄλλα μυρία τοιαῦτα. Wir erkennen unschwer, daß dieser Bereich sich zunächst nur innerhalb des Mathematischen abgrenzen läßt, daß es vor allem aber die Anzahlen sind, die jenen merkwürdigen κοινόν-Charakter aufzuweisen haben: jede Anzahl von Dingen kommt diesen Dingen nur **in ihrer Gemeinsamkeit** zu, während jedes einzelne Ding für sich genommen eines ist.

Aus alledem läßt sich dreierlei entnehmen: 1. es gibt zwei verschiedene Arten des κοινόν, von denen die eine durch das καλόν, das δίκαιον usf. repräsentiert wird, die andere dagegen sich im Gebiet des Quantitativen nachweisen läßt; 2. diese zweite Art des κοινόν findet ihren angemessensten

---

[1]) S. Staat 509 D und 534 A. — Vgl. ferner H.-G. Gadamer, aaO., S. 77, Anm. 1.

[2]) Vgl. hierzu Heath, aaO., I, 304 f.

Ausdruck im jeweiligen Anzahlsein der Dinge und wird von Plato durch die „Formel" angedeutet: ἓν ἑκάτερον, ἀμφότερα δὲ δύο (Gr. Hipp. 300 ff.; Staat 524 B; Theaet. 185 B — s. oben S. 76 und 78, Anm. —; vgl. auch Staat 476 A, 583 E und Phaid. 96 E—97 A; 101 B, C; ferner Parm. 143 C, D und Soph. 243 D, E; 250 A—D); 3. dieser Sachverhalt wird von Plato selbst mit dem Problem der μέθεξις in Zusammenhang gebracht[1]). — Wie immer es sich nun mit dem κοινόν der ersten Art verhalten mag, soviel ist klar, daß die Einsicht in den besonderen κοινόν-Charakter der Anzahl für die Lösung des fundamentalen platonischen Problems der κοινωνία τῶν εἰδῶν, d. h. des ontologischen Methexisproblems, in der Tat von entscheidender Bedeutung ist. Daher geht auch der Dialog „Sophistes", der dieses Problem in den Vordergrund rückt, allenthalben — wenn auch in verschleierter Weise — auf die merkwürdige Art der κοινωνία, wie sie sich in den Anzahlen zeigt, ein.

Das Hauptthema des „Sophistes" ist die Aufzeigung der „Seinsmöglichkeit" des Sophisten aus den letzten Gründen aller möglichen Gliederung des Seienden überhaupt. Daß jedes Seiende in einem „Ab-bild" „verdoppelt" werden kann, wobei das Ab-Bild in rätselhafter Weise gerade das nicht ist, was es darstellt, also ein Seiendes und zugleich ein „anderes" ist, ist zuletzt in der „Spiegelhaftigkeit" des Seins selbst gegründet: das Sein selbst hat von sich aus die Möglichkeit, sich zu wiederholen, sich „nachzuahmen", sich selbst zu begegnen. Damit es überhaupt „Nachahmung", „Spiegelung", „Schatten", „Ähnlichkeit", kurz „Ab-bildung" geben kann, muß dem Sein selbst der Urcharakter der „Abbildbarkeit" zukommen, der damit zugleich alle „Verschiedenheit", alle „Ungleichheit" und alle „Gegensätzlichkeit", aber auch alle „Erkenntnis" möglich macht. Dieser Urcharakter des Seins ist — wie wir vorgreifend sagen dürfen — durch das „Zwiefache überhaupt", die ἀόριστος δυάς bewirkt. Von ihr her ist das Sein in sich selbst ursprünglich entzweit, nämlich nicht nur es „selbst", sondern „selbst" auch ein „anderes" als es „selbst". — Im menschlichen Dasein findet die ἀόριστος δυάς ihre vollendete „abbildhafte" Verkörperung im Sophisten. Die Entscheidung der Frage nach der Möglichkeit des Sophisten muß also letztlich vom Nachweis der ἀόριστος δυάς als der ἀρχή aller Zweiheit und damit aller Vielheit abhängig gemacht werden. Es muß daher der Sophist von vornherein im Hinblick auf das Urphänomen der „Abbildbarkeit" verstanden werden: im Zentrum der Untersuchung muß die schwer faßbare Seinsweise des „Bildes" stehen.

Dementsprechend beginnt die eigentliche Bestimmung des Sophisten mit dessen — notwendigem — Anspruch auf „Allwissen", auf das πάντα

[1]) Wie übrigens auch im Staat 476 A, wo ausdrücklich — neben der dianoetischen — der ontologischen Methexis-Frage Erwähnung getan wird.

ἐπίστασθαι (233 A—C)[1]. Zum besseren Verständnis der Bedeutung dieses unsinnigen Anspruchs bringt der „Fremde" ein παράδειγμα σαφέστερον (233 D), nämlich den Anspruch, schlechthin alles herstellen zu können (ποιεῖν καὶ δρᾶν μιᾷ τέχνῃ συνάπαντα πράγματα). Ein solcher Anspruch kann aber offensichtlich nur „spaßhafterweise" erhoben werden (234 A 6: Θεαι. Παιδιὰν λέγεις τινά). Nicht anders dürfen wir den Anspruch des Sophisten beurteilen (A 7—10), — gerade wenn wir ihn nicht etwa als Betrug von vornherein ablehnen, sondern ihn ernst nehmen, d. h. überhaupt auf ihn eingehen wollen (vgl. Euthyd. 277 D f.). Ja, wenn wir ihm ganz gerecht werden wollen, müssen wir ihn als höchste Form des „Spiels" verstehen, nämlich als „nachahmendes Spiel" (234 B — vgl. 231 A), wie überhaupt die ganze Tätigkeit des Sophisten als eine μίμησις „περὶ τοὺς λόγους" und „διὰ τῶν ὤτων" zu begreifen ist (234 C), analog der Tätigkeit des Malers, der mit Hilfe von Farben für die Augen lauter μιμήματα καὶ ὁμώνυμα τῶν ὄντων herzustellen und so eine ganze Welt vorzutäuschen vermag (234 B — vgl. Politikos 277 C und auch 288 C). Es ist also davon auszugehen, daß der Sophist ein „Nachahmer", ein „Gaukler" ist (γόης καὶ μιμητής — 235 A). Doch hier — d. h. im Bereich der μίμησις selbst — entsteht die Frage, ob die Nachahmung des Sophisten eine „getreue" oder selbst nur eine „scheinbare" ist (d. h. mehr den Ähnlichkeitsbeziehungen in der γεωμετρία entspricht, wo die „Maßverhältnisse" des Originals jeweils erhalten bleiben, oder mehr denjenigen in der ὀπτική bzw. σκηνογραφία, wo diese Verhältnisse perspektivisch verzerrt werden). Es ist die Frage, ob der Sophist es mit einem εἰκών, einem „Ebenbild", oder mit einem φάντασμα, einem „Trugbild", zu tun hat (236 A—C), welcher Gegensatz im Bereich der μίμησις, der εἰδωλοποιική, den Gegensatz des εἶναι und des δοκεῖν spiegelt (236 E). Diese Frage ist unendlich schwer zu entscheiden, weil sie von vornherein „zweierlei" annimmt, ein „Ja" und ein „Nein", ein ὄν und ein μὴ ὄν. Wie ist dieses μή gegenüber dem ὄν möglich? Wie ist überhaupt „Zweierlei" möglich? — das ist die letzte Frage, auf die die ursprüngliche Frage nach der Seinsmöglichkeit des Sophisten führt. Diese Frage stellen heißt nach der „Abbildbarkeit" des Seins überhaupt fragen. Und die ganze Dunkelheit des Erfragten wird gerade dann besonders deutlich, wenn der „vielköpfige" Sophist selbst — sich gleichsam in sich selbst ins Unendliche spiegelnd — nach der rätselhaften Seinsbeschaffenheit des (εἰκών und φάντασμα übergreifenden) εἴδωλον fragt (239 D—240 A). Daß er hierbei eine Antwort nur ἐκ τῶν λόγων vernehmen will, macht ihn zum Überfluß noch einmal als höchsten „Nachahmer" kenntlich: ist doch gerade dies auch die Forderung des „Philosophen", des Sokrates,

[1] Dazu Euthydem 293 C ff. — Daß hier Euthydem und Dionysodor ein „Paar" bilden, ist ein wesentlicher Hinweis auf den Sophisten überhaupt.

der sich einst zum δεύτερος πλοῦς durch die Flucht in die λόγοι anschickte (Phaid. 99 D, E — vgl. auch Politikos 285 E—286 A) und jetzt den stummen Zuhörer spielt. — Die Bestimmung der Seinsbeschaffenheit des „Bildes“ hängt aber von der vorgängigen Lösung der Frage nach dem „Nicht“ ab: im „Bilde“ als solchem ist ja das „Sein“ und das „Nicht-Sein“ unentwirrbar ineinander verflochten (240 A—C). Charakteristischerweise zeigt nun bereits die Darlegung der auf das „Nicht-Sein“ bezüglichen μεγίστη καὶ πρώτη ἀπορία (238 A 2; D 1) den engen Zusammenhang zwischen dem λέγειν bzw. dem διανοεῖσθαι des μὴ ὄν und der Möglichkeit des Zählens, d. h. dem Bestehen von ἀριθμοί auf (238 A — 239 B). „Wir setzen doch schlechthin alle Anzahl von Etwas [d. h. also von Seienden] als eben zum Seienden gehörig“ (Ἀριθμὸν δὴ τὸν σύμπαντα τῶν ὄντων τίθεμεν), fragt der „Fremde“. Und Theaetet antwortet: „Wenn anders auch nur irgend etwas als seiend zu setzen ist“ (Εἴπερ γε καὶ ἄλλο τι θετέον ὡς ὄν). Das bedeutet: „Zählbares“ wird immer als „Seiendes“, und „Seiendes“ immer als „Zählbares“ verstanden. Wir sprechen vom Seienden immer entweder in der „Einzahl“ oder der „Mehrzahl“ (wenn wir hier vom Dual absehen wollen): auch ein Ding ist nur „eines“ unter vielen Dingen (vgl. S. 77; ferner Parm. 144 A). Und gerade wenn wir uns auf das Nicht-Seiende richten oder gar das „Nicht-Sein“ selbst zum Gegenstand der Betrachtung machen wollen, wird der unmittelbare Zusammenhang zwischen dem διανοεῖσθαι und dem λογίζεσθαι καὶ ἀριθμεῖν sichtbar (vgl. S. 76 f.): wir sprechen selbst in diesem Falle von dem μὴ ὄν und von den μὴ ὄντα, wir gliedern sogar das, was sich jeder Gliederung entzieht, nämlich — Nichts! Es ist sehr bezeichnend, daß eben dieses Zusammenhanges wegen der Eleate — „wie von jeher so auch jetzt“ (καὶ γὰρ πάλαι καὶ τὰ νῦν . . .) — sich dem „Nicht-Sein“ nicht gewachsen zu sein erklärt; und wenn er nun von seinem Mitunterredner, dem jungen Theaetet, die ὀρθολογία περὶ τὸ μὴ ὄν zu erwarten vorgibt, so ist der geheime Tiefsinn dieser scherzhaften Wendung gerade darin beschlossen, daß die Aufforderung, κατὰ τὸ ὀρθὸν φθέγξασθαί τι περὶ αὐτοῦ, an den Mathematiker ergeht, der zwar — nicht nur jetzt in seiner Jugend, sondern auch künftighin — im Bereich seiner eigenen Forschung dem Problem des μὴ ὄν ebensowenig gewachsen ist, aber doch gleichsam den Schlüssel zu dessen Lösung in der Hand hält[1]). In Wahrheit kann keiner von beiden für sich allein (σὲ μὲν καὶ ἐμὲ χαίρειν ἐῶμεν — 239 C 4), sondern können nur beide zusammen (ἅμα ἐκ τῶν μαθημάτων . . . καὶ ἐκ τῶν λόγων τῶν καθόλου — Aristoteles, Metaph. M 8, 1084 b 24 f.) die Frage einer Lösung zuführen. Die folgenden Teile des

[1]) Nicht zu vergessen ist, daß im „Großen Hippias“ 303 B (vgl. oben S. 80, Anm. 2) ausdrücklich „irrationale“ Größen erwähnt werden. Theaetet aber ist (neben dem im „Sophistes“ ebenfalls anwesenden Theodoros) der große Klassiker des „Irrationalen“.

Dialogs deuten nur den Weg der möglichen Lösung an. Die hier geübte Betrachtungsweise (ὁ τρόπος τῆς νῦν σκέψεως — 254 C) schließt es aus, diese Lösung „in aller Klarheit" (πάσῃ σαφηνείᾳ) geben zu wollen. Wohl aber wird in verschiedener Beleuchtung auf ein und dieselbe Aporie aufmerksam gemacht, die bereits als solche einen entscheidenden Hinweis auf die Plato vorschwebende Lösung enthält.

Zunächst ist festzuhalten, daß „Bild" nur „sein" kann, wenn „Nicht-Sein" und „Sein" sich miteinander „vermischen" können, — was genau so vom „Sein" des „Scheins", der „Täuschung", der „Lüge", des „Falschen" und des „Irrtums" gilt. Die Frage nach dem „Nicht-Sein" kann überhaupt nicht von der Frage nach dem „Sein" abgelöst werden. Genauer: indem wir nach dem „Nicht-Sein" fragen, leitet uns bereits die Frage nach dem „Sein" (περὶ οὐσίας — 251 C, D; περὶ τοῦ μεγίστου τε καὶ ἀρχηγοῦ πρώτου — 243 D; vgl. auch den überlieferten Nebentitel des Dialogs: Περὶ τοῦ ὄντος), wie wir ja auch auf der Suche nach dem „Sophisten" mit Notwendigkeit auf den „Philosophen" stoßen müssen (vgl. 231 A—B; 253 C). Aber auch umgekehrt: die Schwierigkeit der Frage nach dem „Sein" hängt innerlich mit der Aporie des „Nicht-Seins" zusammen. Es ist im Grunde nur eine Schwierigkeit, in die wir dabei geraten: das „Sein" und das „Nicht-Sein" gehen zu gleichen Teilen in sie ein (ἐξ ἴσου τό τε ὂν καὶ τὸ μὴ ὂν ἀπορίας μετειλήφατον — 250 E). Von vornherein haben wir es also mit einer in sich selbst zwiefachen Frage zu tun. Gerade dies haben sowohl die „Alten" wie die „Neueren" verkannt, die darum auch eine, bei allen ihren Lösungen der Frage nach dem, was ist, auftauchende Schwierigkeit gar nicht in den Blick bekommen konnten. So müssen wir insbesondere an diejenigen, die das „Ganze" mehr als nur eines sein lassen, z. B. alles auf zwei Grundbestandteile, wie etwa das „Warme" und das „Kalte", zurückführen, die Frage richten (243 D, E): „Was sprecht ihr denn nun an an beiden, wenn ihr sagt, daß beide und jedes von beiden **sind**?" (τί ποτε ἄρα τοῦτ' ἐπ' ἀμφοῖν φθέγγεσθε, λέγοντες ἄμφω καὶ ἑκάτερον εἶναι;) Ist dieses „Sein" ein Drittes, neben jenen beiden und außerhalb ihrer (τρίτον παρὰ τὰ δύο ἐκεῖνα)? Dann gäbe es also — im Widerspruch zur aufgestellten These — drei Grundbestandteile. Das „Sein" kann auch nicht mit einem von beiden zusammenfallen: denn dann könnte man nur von diesem einen sagen, daß es „sei", und es gäbe folglich nur diesen einen. „Wollt ihr also beide zusammen als seiend ansprechen?" (Ἀλλ' ἆρά γε τὰ ἄμφω βούλεσθε καλεῖν ὄν;) Wenn sie aber nur „zusammen" sind, dann „sind" sie eben nur zusammen, was im vorliegenden Fall bedeutet: das „Warme" und das „Kalte" wären gar nicht mehr für sich allein, sondern es gäbe offenbar nur Eines, ein „Laues", oder allgemeiner gesagt: ein „Mittleres" (vgl. S. 62 f.). — Was

hier untersucht wird, ist also nichts anderes als die besondere Struktur des κοινόν, von dem im „Großen Hippias" die Rede ist. Daß in der Tat „beide zusammen" (ἄμφω) „eines" sind und doch „zwei" bleiben (vgl. Parm. 143 C—D), kann hier, auf der untersten Stufe ontologischer Überlegung, nicht gezeigt werden, weil sich die beiden in Frage stehenden „Substrate", das „Warme" und das „Kalte", selbst vermischen können. — Die folgenden Erörterungen umspielen in immer neuen Variationen das bei „zwei" Bestimmungen jeweils auftauchende Problem des κοινόν (vgl. insbesondere 247 D), um schließlich bei der Behandlung des Verhältnisses von στάσις und κίνησις die entscheidende Zuspitzung zu erfahren. Es zeigt sich (249 D), daß dem „Sein" sowohl „Wandel" wie „Ruhe" (συναμφότερα) zugesprochen werden muß. Κίνησις und στάσις sind ἐναντιώτατα ἀλλήλοις (250 A 8f.) und daher völlig unvereinbar; beide aber und jedes von beiden „sind" (Ξε. Καὶ μὴν εἶναί γε ὁμοίως φῂς ἀμφότερα αὐτὰ καὶ ἑκάτερον; Θεαι. Φημὶ γὰρ οὖν). Wie beim θερμόν und ψυχρόν kann hier nun festgestellt werden (250 B 2—D 4): daß „Wandel" und „Ruhe" ἀμφότερα καὶ ἑκάτερον „sind", kann nicht bedeuten, daß „Sein" mit einem von ihnen zusammenfällt. Ebenso unmöglich ist auch, wenn man sie beide zusammen „seiend" nennt (εἶναι ἀμφότερα), dieses ihr „Sein" als etwas „Drittes" neben ihnen und außerhalb ihrer (τρίτον τι παρὰ ταῦτα — 250 B 7; ἐκτὸς τούτων ἀμφοτέρων — 250 D 2) anzusetzen, indem man beide zusammennimmt und dann von ihnen als solchen — den Blick allein auf ihre Seinsgemeinschaft gerichtet — absieht (συλλαβὼν καὶ ἀπιδὼν αὐτῶν πρὸς τὴν τῆς οὐσίας κοινωνίαν). Dann wäre das „Sein" eben nicht Wandel und Ruhe „zusammen" (συναμφότερον); es wäre auch „seiner eigenen Natur nach" (κατὰ τὴν αὑτοῦ φύσιν) weder Ruhe noch Wandel, was als das „Allerunmöglichste" erscheint (πάντων ἀδυνατώτατον): denn was nicht ruht, ist eben im Wandel begriffen, und was nicht im Wandel begriffen ist, ruht! Die Aporie des „Seins" wird hier ungelöst liegen gelassen (Τοῦτο μὲν τοίνυν ἐνταῦθα κείσθω διηπορημένον — 250 E 5). Doch hebt Plato eben an dieser Stelle den inneren Zusammenhang der Aporie des „Seins" mit der des „Nicht-Seins" hervor (250 D, E). Die Formulierungen, die dafür gewählt werden, lassen wiederum das Problem: „beide zusammen — jedes von beiden — keines von beiden" hervortreten: die merkwürdige κοινωνία zwischen ὄν, κίνησις und στάσις ist eben keine andere als die zwischen dem „Sein" und dem „Nicht-Sein" selbst.

So bildet auch in allem Folgenden das Verhältnis von στάσις und κίνησις den Kernpunkt der Erörterungen. Das Gespräch wird jedoch von nun an auf eine breitere Basis gestellt (251 A ff.): es wird von jener „Gabe der Götter an die Menschen" (Phileb. 16 C) ausgegangen, von dem „erstaunlichen" (ebda. 14 C) Satz nämlich, wonach ein jegliches „eines" und

„vieles“ (ἓν καὶ πολλά) zugleich (ἅμα) sei, und daran die Frage angeschlossen, wie man sich die Verknüpfung des „Vielen“ zur „Einheit“ des jeweilig Seienden zu denken habe. Diese Frage stellt nur eine universale Erweiterung der ursprünglich an „zwei“ Bestimmungen auftauchenden Fragen nach der Bedeutung des ἅμα oder des ἄμφω dar (vgl. Phaid. 96 E—97 A). Zunächst in größter Allgemeinheit — in bezug auf jegliches Seiende — aufgeworfen, leitet sie zum engeren ontologischen Methexisproblem über, zur Frage der κοινωνία τῶν εἰδῶν (bzw. τῶν γενῶν). Es ergeben sich hier drei und nur drei Möglichkeiten (251 D; 252 E), nämlich 1. überhaupt keine κοινωνία, 2. allseitige Verknüpfbarkeit aller εἴδη untereinander, 3. partielle κοινωνία, in dem Sinne, daß manche εἴδη sich miteinander „vermischen“ können, manche aber nicht[1]). Da die beiden ersten Möglichkeiten faktisch nicht bestehen, bleibt notwendigerweise allein die dritte übrig (nachdrücklichst 252 E; vgl. auch 256 C). Diese aber weist bereits im Ansatz auf die ἀριθμός-Struktur der γένη hin: denn sie besteht ja in gar nichts anderem als in der Aufgliederung des gesamten Bereichs der εἴδη in einzelne Gruppen oder Verbände derart, daß jede in einem bestimmten Verband befindliche Idee, die in ihrer Einzigkeit eine eidetische ἑνάς oder μονάς (Phileb. 15 A, B) darstellt, mit den übrigen Ideen desselben Verbandes „zusammengeworfen“ werden kann, mit den Ideen anderer Verbände aber nicht. Die εἴδη bilden also Monadenverbände, d. h. ἀριθμοί, eigener Art. Die Einheiten, aus denen diese Verbände bestehen, sind keine mathematischen Monaden, die ja alle ausnahmslos völlig gleichartig sind und somit alle „zusammengeworfen“ werden können (Aristoteles, Metaph. M 7, 1081 a 5 f.: συμβληταὶ καὶ ἀδιάφοροι — vgl. S. 33 ff., 53 u. 56). Während die Anzahlen, mit denen es der Arithmetiker zu tun hat, die ἀριθμοὶ μαθηματικοί oder μοναδικοί, daher allesamt zusammenzählbar sind — so daß z. B. acht Monaden und zehn Monaden zusammen eben achtzehn Monaden ergeben —, können die εἴδη-Verbände, die ἀριθμοὶ εἰδητικοί, in keinerlei „Gemeinschaft“ miteinander treten. Ihre „Monaden“ sind alle verschiedenartig und lassen sich nur „partiell“ „zusammen“bringen, nämlich nur insoweit, als sie eben ein- und demselben Verband angehören: soweit sie Bestandteile verschiedener Verbände sind, sind sie πάντῃ διωρισμέναι (Soph. 253 D 9) oder ἀσύμβλητοι[2]).

---

[1]) Vgl. dazu die drei Möglichkeiten bei Aristoteles, Metaph. M 7: 1081 a 5 ff. — a 17 ff. — b 35 ff. — Die Frage nach der „Vermischung“ ist dabei immer — wie bei den Buchstaben (252 E—253 A) und den Tönen (253 B) — vom Gesichtspunkt der Entstehung sinnvoller, „seinsmöglicher“ Gebilde aus zu verstehen (vgl. 261 D/E).

[2]) S. Aristotle's Metaphysics . . . by W. D. Ross, Oxford 1924, II 427, die Notiz zum Terminus ἀσύμβλητος.

Die Konzeption einer „arithmetischen“ Gliederung des Ideenbereichs gestattet nun in der Tat eine Lösung des ontologischen Methexisproblems. Die Monaden, aus denen eine „eidetische Anzahl“, d. h. ein Verband von Ideen[1]), besteht, sind ja nichts anderes als ein Gefüge zusammengehöriger εἴδη. Ihre Zusammengehörigkeit wurzelt darin, daß sie ein und demselben εἶδος höherer Ordnung, nämlich einer „Gattung“, einem γένος zugehören[2]). Daß sie nun alle zusammen an diesem γένος „teilhaben“ (z. B. „Mensch“, „Pferd“, „Hund“ usf. am „Lebewesen“), ohne daß letzteres dadurch unter die (endlich!) vielen εἴδη „aufgeteilt“ würde und ohne daß jedes der εἴδη seine unaufteilbare Einheit verlöre, ist nur möglich, wenn das γένος selbst die Seinsart eines ἀριθμός aufweist. Nur die ἀριθμός-Struktur mit ihrem besonderen κοινόν-Charakter vermag die von der Dialektik geforderte εἴδη-Gemeinschaft in ihren wesentlichen Zügen zu gewährleisten: die Unteilbarkeit der einzelnen, den ἀριθμός-Verband bildenden „Monaden“, die Begrenztheit dieses Monadenverbandes, d. i. der Zusammenschluß vieler Monaden zu einem Verband, zu einer ἰδέα, und die unversehrte Ganzheit auch dieser letzteren. Was die einzelnen εἴδη „gemeinschaftlich“ sind, das kommt ihnen nur in ihrer Gemeinsamkeit zu und ist nicht etwas, was neben und außerhalb ihrer (παρά und ἐκτός) zu finden wäre. Die Einheit und Begrenztheit des ἀριθμός-Verbandes aber ist hier in der Sachhaltigkeit der ἰδέα verwurzelt, zu der der λόγος in seinem „analytischen“ Begründungsverfahren jeweils gelangt. Es bedarf hier nicht einer besonderen Anzahlenart von bestimmter Beschaffenheit — wie dies im dianoetischen Anzahlbereich der Fall ist (vgl. S. 61) —, um diese Einheit zu begründen. Es kann hier überhaupt keine jenen des dianoetischen Bereichs entsprechenden Anzahlenarten geben, weil jede eidetische Anzahl kraft ihres eidetischen Charakters einzig in ihrer Art ist, wie auch jeder ihrer „Monaden“ nicht nur Einheit, sondern auch Einzigkeit zukommt. Ist doch jede Idee eben dadurch charakterisiert, daß sie immer dieselbe und schlechthin einzig ist, im Gegensatz zu den unbegrenzt vielen gleichartigen und in beliebiger Häufigkeit zu bestimmten Anzahlen zusammenstellbaren Monaden des mathematischen Anzahlbereichs (s. oben S. 59). Die „reinen“ mathematischen Monaden unterscheiden sich zwar von den einzelnen sinnlich wahrnehmbaren Dingen durch ihre Unwandelbarkeit und ihr der Zeit entzogenes Bestehen, unter-

[1]) Die Bedeutung des Terminus ἀριθμὸς εἰδητικός hat O. Becker (Die diairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen, Quellen und Studien, B I, S. 483 ff.) klar erkannt, ohne jedoch aus seiner Einsicht die notwendigen Folgerungen zu ziehen (s. oben S. 65 f.).

[2]) Vgl. Aristoteles, Metaph. I 4, 1055 a 6 f.: τὰ μὲν γὰρ γένει διαφέροντα οὐκ ἔχει ὁδὸν εἰς ἄλληλα, ἀλλ᾽ ἀπέχει πλέον καὶ ἀσύμβλητα.

scheiden sich aber von ihnen in dem Sinne nicht, daß auch sie in Mengen auftreten und gleich-artig sind (Aristot., Metaph. B 6, 1002b 15f.: τῷ δὲ πόλλ' ἄττα ὁμοειδῆ εἶναι οὐθὲν διαφέρει), während doch jedes εἶδος unreproduzierbar und wahrhaft eines ist (Metaph. A 6, 987b 15ff.: τὰ μαθηματικὰ ... διαφέροντα τῶν μὲν αἰσθητῶν τῷ ἀΐδια καὶ ἀκίνητα εἶναι, τῶν δ' εἰδῶν τῷ τὰ μὲν πόλλ' ἄττα ὅμοια εἶναι τὸ δὲ εἶδος αὐτὸ ἓν ἕκαστον μόνον). So ergeben sich in der Tat, wie Aristoteles berichtet (z. B. Metaph. A 6, 987b 14ff. und N 3, 1090b 35f.), drei Arten von ἀριθμοί: 1. der ἀριθμὸς εἰδητικός, 2. der ἀριθμὸς αἰσθητός und 3. „dazwischen" (μεταξύ) der ἀριθμὸς μαθηματικός oder μοναδικός, der mit dem ersten die „Reinheit" und Unwandelbarkeit, mit dem zweiten die Vielheit und Reproduzierbarkeit teilt. Dabei stellt eine aisthetische Anzahl gar nichts anderes dar, als die gerade in dieser Anzahl der αἴσθησις vorliegenden sinnlich wahrnehmbaren Dinge selbst. Die mathematischen Anzahlen bilden einen eigenständigen Gegenstandsbereich der Forschung, zu dem die διάνοια gelangt, indem sie ihr eigenes Tun im λογίζεσθαι καὶ ἀριθμεῖν vorbildlich erfüllt sieht. Die eidetische Anzahl endlich gibt die Seinsart des νοητόν als solchen an: sie ist die ontologische Bestimmung des εἶδος als eines in vielfältigen Sachbezügen zu anderen εἴδη stehenden und doch schlechthin unaufteilbaren Seienden.

Die platonische Lehre von den ἀριθμοὶ εἰδητικοί ist uns in der soeben verwandten Terminologie nur aus der aristotelischen Polemik gegen sie bekannt (vgl. vor allem Metaph. M 6—8). Es ist sehr fraglich, ob Plato mehr als den allgemeinen Rahmen dieser Lehre abgesteckt hat. In seiner Vorlesung „Περὶ τἀγαθοῦ" [1]) scheint er den Bereich der eidetischen Anzahlen nicht über die Zehn hinaus ausgedehnt zu haben (vgl. u. a. Aristot. M 8, 1084a 12ff., 25ff. und Phys. Γ 6, 206b 32f.). Er blieb hierin — was auch für seinen Nachfolger Speusipp gilt — der pythagoreischen Tradition treu, wie ja überhaupt die eidetischen Anzahlen in ihrer begründenden Funktion am ehesten noch mit den πυθμένες des mathematischen Anzahlbereichs zu vergleichen wären (s. S. 68). Indem nun Aristoteles die ἀριθμοί so versteht, wie sie in ihrem ureigensten Gebiet allein verstanden werden können, weist er die mannigfaltigen Widersprüche auf, die sich aus einer Übertragung des universalen Charakters des Zählbaren als solchen auf die jeweils besondere Sachhaltigkeit der εἴδη ergeben müssen. Für Plato jedoch ist gerade die unmathematische Verwendung der ἀριθμός-Struktur wesentlich. Die ἀριθμοὶ εἰδητικοί sollen ja nicht nur die innere Gliederung des Ideen-

[1]) Eine Zusammenstellung der Quellen über diese Vorlesung gibt Toeplitz in seinem Aufsatz „Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Plato" § 5, Quellen und Studien B I, S. 18.

bereichs, sondern jede mögliche Gliederung, jede mögliche Aufteilung und Zusammenfügung, — kurz jede Zählung allererst verständlich machen. Während der Arithmetiker und Logistiker in seinem Bereich den unbegrenzt vielen Monaden bestimmte εἴδη „unterlegt“, um auf diese Weise ihre Zusammenfassung zu einzelnen Monadenverbänden „hypothetisch“ begründen zu können (vgl. S. 73 u. 78), vermag erst der Dialektiker den eigentlichen Grund für das Bestehen solcher Anzahlenarten und jeder einzelnen Anzahl von reinen Einsen anzugeben: nur weil es zusammengehörige εἴδη gibt, die in ihrer Gemeinsamkeit je ein „Geschlecht“ ausmachen, das seinerseits wegen dieser „arithmetischen“ Verknüpfung seiner „Glieder“ als eidetische „Anzahl“, etwa als die Sechs oder als die Zehn angesprochen werden muß, kann es beliebig viele Anzahlen, z. B. Hexaden und Dekaden, sowohl im Bereich der „reinen“ Einsen als auch in dem der sinnlich wahrnehmbaren Dinge geben, können ferner Anzahlen eine ganz bestimmte — einheitsstiftende — Art aufweisen (vgl. S. 60f.), also etwa „geradungerade“ oder „dreieckig“ sein. Erst die ἀριθμοὶ εἰδητικοί machen überhaupt so etwas wie „Anzahl“ in dieser unserer Welt möglich. Sie begründen allererst die Möglichkeit des Zählens und Rechnens, weil sie kraft ihrer Sachhaltigkeit die in bestimmter „Anzahl“ faßbare Art- und Gattungsverschiedenheit der Dinge und darüber hinaus — durch „verzerrende“ Abbildung der ontologischen Methexis (vgl. S. 82; 80 u. 94) — deren unendliche Mannigfaltigkeit bewirken (vgl. dazu Phileb. 16 C—E). Mit dieser ihrer begründenden Funktion ist ihre Eigenständigkeit, ihr Selbständig- und Abgelöstsein, nicht nur den αἰσθητά, sondern auch den „reinen“ mathematischen Anzahlen gegenüber gegeben (s. S. 72). Und was die Pythagoreer im Hinblick auf die sinnlich wahrnehmbare Welt unternahmen, in der sie alles Seiende befaßt glaubten (Aristot., Metaph. A 8, 990 a 3—5), das unternimmt nun Plato angesichts der vom λόγος erschlossenen, wahrhaft seienden Welt der νοητά. Auch ihm bedeutet das „Anzahl“-sein der νοητά deren Geordnetsein, deren τάξις. Zwar bilden die mathematischen Monaden ein völlig homogenes Feld, doch ist die „Reihenfolge“ der Monaden-Anzahlen (vgl. S. 57f.) in der ursprünglichen Ordnung der eidetischen Anzahlen begründet. Jede eidetische Anzahl ist ihrem „Nachbarn“ vor- bzw. nachgeordnet, so daß eine Subsumption aller dieser Anzahlen unter eine ihnen allen gemeinsame Idee, nämlich „die Anzahl überhaupt“, gar nicht möglich ist[1]). Diese τάξις der eidetischen Anzahlen findet ihren „logischen“ Ausdruck in dem Verhältnis der Über- und Unterordnung der εἴδη: das „Abstammungs“-Verhältnis zwischen den höheren und den

[1]) Aristot., Metaph. B 3, 999 a 6 f.: ἐν οἷς τὸ πρότερον καὶ ὕστερόν ἐστιν, οὐχ οἷόν τε τὸ ἐπὶ τούτων εἶναί τι παρὰ ταῦτα, ferner Eth. Nic. A 4, 1096 a 17—19 und Metaph. M 6, 1080 b 11 ff. — Dazu J. C. Wilson, aaO., S. 247 f. und 253 ff.

niederen Ideen entspricht der „genetischen“ Ordnung der eidetischen Anzahlen. Je „höher“ das γένος, d. h. je ungegliederter die eidetische Anzahl, um so ursprünglicher und umfassender ist sie. Die in dieser Ordnung „erste“ eidetische Anzahl ist die eidetische „Zwei“: sie stellt das γένος des „Seins“ als solchen dar, das die beiden εἴδη: „Ruhe“ und „Wandel“ umfaßt. Daß wenigstens dieses letztere genuine platonische Lehre ist, läßt sich, wenn auch nicht „in aller Klarheit“, so doch deutlich genug aus dem „Sophistes“ entnehmen[1]).

Jene dritte Möglichkeit der „partiellen“ κοινωνία τῶν εἰδῶν (vgl. S. 86) wird hier nur an „gewissen größten Gattungen“ (den μέγιστα γένη — 254 C) nachgeprüft, nämlich an folgenden „fünf“: ὄν, στάσις, κίνησις, ταὐτόν, θάτερον (vgl. 254 E 4; 255 C 8; 255 E 8; 256 C/D). Diese — innerhalb des dianoetisch-dialogischen Verfahrens allein mögliche — „Zählung“ wird dem eigentlichen ontologischen Sachverhalt ebensowenig gerecht wie die Behauptung, es handle sich bei der Reihe „Sophist“ — „Staatsmann“ — „Philosoph“ um „drei“ gleichgewichtige γένη, denen auch drei Dialoge entsprechen müßten (217 A—B; vgl. 254 B und Politik. 257 A—B). Die Untersuchung der κοινωνία zwischen den „fünf“ μέγιστα γένη bezweckt — wie ausdrücklich gesagt wird — eine der hier geübten Betrachtungsweise zwar angemessene, aber doch eben nicht völlig zureichende Erfassung sowohl des „Seins“ als auch des „Nicht-Seins“ (ἵνα τό τε ὂν καὶ μὴ ὂν εἰ μὴ πάσῃ σαφηνείᾳ δυνάμεθα λαβεῖν, ἀλλ᾽ οὖν λόγου γε ἐνδεεῖς μηδὲν γιγνώμεθα περὶ αὐτῶν, καθ᾽ ὅσον ὁ τρόπος ἐνδέχεται τῆς νῦν σκέψεως — 254 C; vgl. oben S. 83 f.). — Es wird gezeigt (254 D—257 A), daß in der Tat zwischen allen diesen γένη „Gemeinschaft“ besteht, wobei aber die Art dieser „Gemeinschaft“ keinesfalls in allen Fällen dieselbe ist. Zunächst bildet — was nicht übersehen werden darf — die Unvereinbarkeit von στάσις und κίνησις die Grundlage der ganzen Erörterung. Auf die Unmöglichkeit ihrer „Vermischung“ war bereits 250 A—B (vgl. oben S. 85) und mit größtem Nachdruck 252 D (ταῖς μεγίσταις ἀνάγκαις ἀδύνατον) hingewiesen worden. Noch einmal wird dies 254 D 7—9 festgestellt (Ξε. Καὶ μὴν τώ γε δύο φαμὲν αὐτοῖν ἀμείκτω πρὸς ἀλλήλω.

[1]) Die Dialoge „Theaetet“, „Parmenides“, „Sophistes“ und „Politikos“ bilden — in dieser Reihenfolge — zweifellos eine Einheit. Ihr äußerer Zusammenhang ist bereits dadurch gegeben, daß der „Sophistes“ ausdrücklich an den „Theaetet“ anknüpft und ebenso ausdrücklich auf den „Parmenides“ Bezug nimmt, daß andererseits der „Politikos“ die unmittelbare Fortsetzung des „Sophistes“ bildet. Auf den inneren Zusammenhang der vier Dialoge können wir im Rahmen dieser Arbeit nicht eingehen. Es mag nur bemerkt werden, daß der „Theaetet“ und der „Parmenides“ auf sehr verschiedenen Ebenen die Aporien der ἐπιστήμη entwickeln, die dann im „Sophistes“ und im „Politikos“ der Lösung — soweit das dianoetisch-dialogische Verfahren es eben zuläßt — zugeführt werden. Die eigentliche Lösung darf und kann auf diesem Wege nicht gegeben werden (vgl. Phaidr. 277 E ff.; 7. Brief 342 E ff.; auch Kratyl. 438 D ff.).

Θεαι. Σφόδρα γε). Beide aber „sind“, woraus hier die „Dreizahl“ von στάσις, κίνησις und ὄν gefolgert wird (D 12), während doch bereits gezeigt worden ist, daß das ὄν nicht als ein τρίτον παρὰ ταῦτα bzw. ἐκτὸς τούτων verstanden werden darf, da dies zum „Allerunmöglichsten“ führe (250 B—D; s. oben S. 85). Beim Zusammenhang von ὄν, κίνησις und στάσις versagt also der λόγος! Er versagt, weil er dort „drei“ zählen muß, wo es in Wahrheit nur „Zwei“ gibt, nämlich στάσις und κίνησις, die ἑκάτερον ἕν sind und ἀμφότερα δύο![1]) Er kann hier bei der „Zwei“ darum nicht stehen bleiben, weil er die στάσις und die κίνησις nicht nur „zusammen“, sondern auch einzeln als „seiend“ anspricht, während er bei „zwei mathematischen Monaden“ jede dieser Monaden für sich als nur eine und eben nicht als „zwei“ versteht (vgl. S. 80). Ὄν, κίνησις und στάσις lassen sich also trotz ihrer „arithmetischen“ κοινωνία überhaupt nicht „zählen“ — darin besteht gerade das Versagen des λόγος[2])! Dem dianoetischen Verständnis ist nur so viel klar, daß jedes der von ihm angenommenen „drei“, sofern es „selbst“ eben das ist, was es ist, d. h. in seiner „Selbigkeit“ erfaßt wird, ein „anderes“ ist als die „zwei“ übrigen (Οὐκοῦν αὐτῶν ἕκαστον τοῖν μὲν δυοῖν ἕτερόν ἐστιν, αὐτὸ δ' ἑαυτῷ ταὐτόν — 254 D 14f.). Die entscheidende Verlegenheit der διάνοια wird durch die Einführung dieses weiteren „Paars“, der „Selbigkeit“ und des „Andersseins“ (ταὐτόν — θάτερον), noch verstärkt, doch zeichnet sich damit auch die Lösung ab, mit der sie sich in ihrem eigenen Bereich bescheiden muß (vgl. 257 A 9—11). Sie besteht darin, daß das θάτερον — analog den Vokalen bei den Buchstaben (253 A 4—6) — durch schlechthin alle γένη (διὰ πάντων — 253 C 1) hindurchgeht (255 E 3f.) und so zugleich ein sie zusammenknüpfendes „Band“ (δεσμός) und die „Ursache“ ihrer Trennung (das αἴτιον τῆς διαιρέσεως — 253 C 3) ist, d. h. den „Ur-Grund“ aller Gliederung überhaupt darstellt. Das θάτερον ist in sich selbst zwiefach: denn ein „anderes“ ist ein jegliches nur in Beziehung auf ein „anderes“ (τὸ δέ γ' ἕτερον ἀεὶ πρὸς ἕτερον — 255 D 1; vgl. D 6 f.). Das bedeutet, daß die Möglichkeit des „Andersseins“ an die „Selbigkeit“ der im Anderssein aufeinander bezogenen Glieder gebunden ist: auch das ταὐτόν geht also durch alle γένη hindurch. Diese κοινωνία zwischen dem ταὐτόν und dem θάτερον, die nichts als ein anderer Ausdruck für die innere Zwiefachheit des θάτερον selbst ist[3]), läßt die διάνοια die „Doppelheit“ des „Seins“ verstehen: daß es nämlich nicht nur sich

---

[1]) Dieser Sachverhalt wird für uns durch den „symbolischen“ „Zahl“-Begriff verdunkelt (s. 2. Teil, §§ 11 u. 12), bildet aber für die eleatische, pythagoreische und platonische Philosophie eine kaum überwindliche Schwierigkeit.

[2]) Vgl. 7. Brief, 342 E: τὸ τῶν λόγων ἀσθενές.

[3]) Über die sprachliche „Doppelheit“ des ἕτερον vgl. Stenzel, Zur Theorie d. Log. b. Arist., Quellen und Studien B I, S. 39. (Vgl. auch Phaid. 60 B.)

stets gleichbleibende „Ruhe", sondern zugleich auch „Wandel" bedeutet und daß dadurch allein die „Ab-bildung" des Seienden im Erkennen, das γιγνώσκειν und das γιγνώσκεσθαι (248 B ff.), und darüber hinaus jede Abbildung möglich wird. Das „Zugleich" bedeutet hier nicht — wie etwa in der Cusanischen oder Hegelschen Dialektik — eine coincidentia oppositorum. Wie die διάνοια im Gebiet des μᾶλλον καὶ ἧττον an dem „Gegensatz" das sie allererst „erweckende" „Hindernis" (ἐναντίωμα) findet (s. S. 77 f.), muß sie schließlich am Ende ihrer „dialektischen" Tätigkeit einsehen, daß das „Zugleich" gegensätzlicher Bestimmungen in Wahrheit ein „Zusammen" andersartiger Elemente darstellt. Das „Anderssein" macht eine „arithmetische Gemeinschaft" zwischen völlig „unvermischbaren" und doch „zusammengehörigen" eidetischen Monaden möglich: das παράδειγμα einer solchen, dem λόγος und also dem Zählen allerdings nicht mehr zugänglichen, κοινωνία ist die aus στάσις und aus κίνησις bestehende eidetische „Zwei": die κίνησις ist das gegenüber der στάσις „Andere", ohne welches auch die στάσις selbst gar nicht „sein" kann, da eben nur „beide zusammen" das „Sein" ausmachen. Damit ist auch gesagt, daß zum „Sein" selbst notwendig das „Nicht" gehört: wie die στάσις nicht die κίνησις ist, so ist die κίνησις nicht die στάσις. Das „Anderssein" erweist sich so als der ontologische Sinn des „Nicht-Seins", das vom „Sein" selbst gar nicht ablösbar ist. „Notwendig also ist das Nicht-Sein [unmittelbar] an dem Wandel wie auch bei allen Gattungen [des Seienden]; denn bei allen bewirkt die Natur des Andersseins je ein anderes gegenüber einem [anderen] Seienden und macht so ein jegliches zu einem Nicht-Seienden [nämlich «nicht so, sondern anders Seienden»], und alles insgesamt können wir demnach in diesem Sinne mit Recht als Nicht-Seiendes ansprechen, wie auch umgekehrt, sofern es am Sein teil hat, als seiend und als Seiendes" (256 C/D): Ἔστιν ἄρα ἐξ ἀνάγκης τὸ μὴ ὂν ἐπί τε κινήσεως εἶναι καὶ κατὰ πάντα τὰ γένη· κατὰ πάντα γὰρ ἡ θατέρου φύσις ἕτερον ἀπεργαζομένη τοῦ ὄντος ἕκαστον οὐκ ὂν ποιεῖ, καὶ σύμπαντα δὴ κατὰ ταὐτὰ οὕτως οὐκ ὄντα ὀρθῶς ἐροῦμεν, καὶ πάλιν, ὅτι μετέχει τοῦ ὄντος, εἶναί τε καὶ ὄντα[1]). Der Schatten des „Nicht-Seins" begleitet notwendig alles „Sein" des Seienden — wie der sophistische Elenchos zum wesentlichen Geschäft auch des Philosophen gehört (vgl. 230 A—231 B), wie der in sich zurücklaufende Wandel des wahren Kosmos seiner Unwandelbarkeit ursprünglichstes Abbild ist. In jedem einzelnen Fall ist das „Nicht-Seiende" nur ein „anderes Seiende", nicht etwa das Gegenteil eines Seienden, was soviel wie das undenkbare und unsagbare „Nichts" hieße (οὐκ ἐναντίον τι . . . τοῦ ὄντος ἀλλ' ἕτερον μόνον — 257 B; vgl. 258 B): in jedem einzelnen Fall haben wir eine „Gegenüberstellung"

[1]) Vgl. Aristoteles, Physik Γ 2, 201 b 20 f., wo die Platoniker als ἑτερότητα καὶ ἀνισότητα καὶ τὸ μὴ ὂν φάσκοντες εἶναι τὴν κίνησιν erwähnt werden.

eines Seienden und eines anderen Seienden vor uns (ὄντος πρὸς ὂν ἀντίθεσις — 257 E 6). Darum besteht aber auch die Möglichkeit einer „Verwechslung“ oder „Vertauschung“ des „Einen“ und des „Anderen“, des „Seins“ und des „Nicht-Seins“, worauf alles „Widersprechen“ (vgl. 232 B), alle „Täuschung“, aller „Irrtum“ und alle „Lüge“ beruht (260 B—264 B). In der dargelegten „Doppelheit“ des „Seins“ findet erst das diairetische Verfahren seine ontologische Begründung und Rechtfertigung. Die „Aufteilungen“ am Anfang und am Ende des „Sophistes“ (wie auch im „Politikos“) sollen immer wieder auf diese „Doppelheit“ hinweisen (vgl. auch Politik. 287 C; 306 C ff. — dazu Charm. 159 B ff.). Sie sollen damit zugleich das κατὰ γένη διαιρεῖσθαι einüben (vgl. Sophistes 253 D; Politikos 285 C—D), das der Dialektiker beherrschen muß, um zu der ursprünglichen „genetischen“ Ordnung der eidetischen Anzahlen zu gelangen[1]). Der „Sophistes“ hat insbesondere zu zeigen, daß alle Aufgliederung der γένη — mit anderen Worten: die „arithmetische“ Gemeinschaft der Ideen — nur vom θάτερον her verständlich ist. Dessen φύσις besteht ja als solche in einem „Zerstückeltsein“, was diese — nicht zufällig! — der erkennenden ἐπιστήμη verwandt macht (Ἡ θατέρου μοι φύσις φαίνεται κατακεκερματίσθαι καθάπερ ἐπιστήμη — 257 C 7 f.; 258 D/E; vgl. Parm. 142 E; 144 B u. E): es „ist“ immer gleichsam nur ein „Teil“ (μόριον) seiner selbst, nämlich ein ἕτερον ἑτέρου, richtig verstanden: ein „Gegen-Teil“. Als ἀρχή aller „Zwiefachheit“ muß es — vom platonischen Begründungsverfahren aus gesehen (vgl. S. 72) — als das „Zwiefache überhaupt“, als die ἀόριστος δυάς angesprochen werden[2]). Diese δυάς ist ἀόριστος, weil sie nicht selbst „zwei“ wie immer geartete, voneinander abgegrenzte und schon eindeutig bestimmte Seiende darstellt[3]). Indem sie

---

[1]) Der Zusammenhang zwischen dem diairetischen Verfahren und der Lehre von den eidetischen Anzahlen bei Plato stellt das Hauptthema der Forschungen Stenzels dar. Doch ist die Interpretation des ἀριθμός als eines λόγος, wie sie von Stenzel im Anschluß an die Thesen von Toeplitz (Quellen und Studien B I, S. 34 ff. und S. 3 ff.) in Ansatz gebracht worden ist, für die Aufhellung dieses Zusammenhanges nicht zureichend. Sie verkennt jedenfalls den Vorrang der „Arithmetik“ gegenüber der „Logistik“, mag diese letztere — vornehmlich in Gestalt der Proportionenlehre — bei Plato eine noch so große Rolle spielen.

[2]) Vgl. dazu auch Nikomachos II, 20, S. 117 f. (Hoche).

[3]) Sie läßt sich höchstens als „zweierlei Unbegrenztes“ verstehen. In diesem Sinne hat Plato sie wohl — als ἀρχή des μᾶλλον καὶ ἧττον — „das Groß und Klein“ genannt (vgl. z. B. Aristot., Physik Γ 4, 203 a 15 f.: Πλάτων δὲ [φησὶν εἶναι] δύο τὰ ἄπειρα, τὸ μέγα καὶ τὸ μικρόν) oder auch als ὑπεροχὴ καὶ ἔλλειψις umschrieben (vgl. Politikos 283 C ff.; Aristot., Physik A 4, 187 a 16 f.). — Von der δυὰς ἀόριστος als der ἀρχὴ des „Nicht“ (und damit aller Vielheit) führt ein direkter Weg zur aristotelischen Lehre vom ὄνομα ἀόριστον (De interpr. 2, 16 a 30 ff. und 10, 19 b 8 f., wo es übrigens ausdrücklich heißt: ἕν γάρ πως σημαίνει καὶ τὸ ἀόριστον [z. B. οὐκ ἄνθρωπος] — vgl. oben S. 83) und weiterhin zum „unendlichen Urteil“.

vielmehr dem Sein eines jeglichen Seienden „Abbildbarkeit" verleiht, „verdoppelt" sie jegliches Seiende und läßt es dadurch überhaupt erst zu einem „Seienden" werden: sie ist δυοποιός (Aristot., Metaph M 8, 1083 b 35 f.; M 7, 1082 a 15). Sie macht folglich durch fortgesetzte „Verdoppelung" der εἴδη — deren der λόγος in der „Aufteilung" der γένη habhaft wird — die genetische Ordnung der eidetischen Anzahlen möglich[1]). Aber sie vermag dies alles nur, weil an der „Spitze" der τάξις der eidetischen Anzahlen, diese zugleich abschließend und einleitend, die Eins selbst in ihrer „absoluten" Priorität steht (vgl. S. 77 f.). Jenseits aller Gliederung, jenseits der „Zwei" und also „über das Sein selbst hinaus" (ἐπέκεινα τῆς οὐσίας — Staat 509 B) ist diese nicht, wie die mathematische Eins, eine Eins unter vielen Einsen[2]), sondern das ursprüngliche, vollkommene und allumfassende Ganze (vgl. dazu Soph. 244 D—245 D; ferner Parm. 137 C; 142 D). Als „Ganzes" ist sie das eines „anderen" schlechthin Unbedürftige, ganz und gar „Fertige". Sie ist in diesem Sinne „das Vollendete selbst", nämlich das Urbild jeder möglichen, gegen „anderes" abgegrenzten, „relativen" Ganzheit: sie ist die ἰδέα τοῦ ἀγαθοῦ.

Die Lehre von den γένη als eidetischen Anzahlen muß schließlich auch die Grundlage einer eidetischen Logistik abgeben. So läßt sich ja z. B. die σωφροσύνη und die δικαιοσύνη im 4. Buch des „Staates" (vgl. dazu 1. Buch, 337 A—C!) oder die τάξις der Elementarstoffe im „Timaios" allein von der ἀναλογία her begreifen. Auch ist das Verhältnis des ontologischen zum dianoetischen Methexisproblem (s. S. 80) wie überhaupt das Urbild-Abbild-Verhältnis erst von „logistischen" Überlegungen aus genauer faßbar. Was man gewöhnlich bei der Erörterung der Methexisfrage übersieht, ist der abbildliche Charakter der ganzen Methexisbeziehung, sofern sie den dianoetischen Bereich, d. h. das Verhältnis eines εἶδος zu einer Reihe von αἰσθητά betrifft. Erst die Zurückführung dieser Beziehung auf die „Gemeinschafts"verhältnisse im Bereich der εἴδη selbst läßt uns die Methexisfrage in ihrer urbildlichen Gestalt erblicken. Und hier eben stellt die Konzeption des ἀριθμὸς εἰδητικός eine der möglichen Lösungen dieser Frage dar.

Mit dieser Lösung ist zugleich die endgültige Beantwortung des „Eins- und Vieles"-Problems gegeben: der ἀριθμὸς εἰδητικός zeigt an ihm selbst

[1]) Auf diese Weise können übrigens nur die geraden eidetischen Anzahlen „erzeugt" werden (vgl. Aristot., Metaph. N 4, 1091 a 23 f.), während die entsprechenden ungeraden durch „Begrenzung" seitens des ἕν entstehen (s. dazu Ross I, 173 ff. und II, 484; vgl. für diesen Zusammenhang auch die Definition des Thymaridas: das ἕν als περαίνουσα ποσότης und Aristoteles, Physik Γ 4, 203 a 10 ff.; ferner Arist., Metaph. M 8, 1083 b 29 f.).

[2]) Vgl. hierzu Sextus Empiricus, adv. mathem. IV, Abschnitt Πρὸς ἀριθμητικούς, ed. Bekker S. 724, 6—21. (Die folgende Diskussion bei Sextus, aaO., S. 724—728, ist übrigens für den griechischen Anzahl-Begriff überhaupt sehr aufschlußreich und bestätigt die in der vorliegenden Arbeit vertretene Auffassung.)

die Möglichkeit des unmittelbaren Einsseins von Vielem an. Aber erkauft wird diese Lösung, wie wir gesehen haben, durch die Überschreitung der Grenzen, die dem λόγος gesetzt sind. So ist von ihr aus insbesondere die ständig geübte Prädikationsweise, etwa: „das Pferd ist ein Lebewesen“, „der Hund ist ein Lebewesen“ usf. nicht zu verstehen. Vor allem geht hier die „natürliche“, im Ansprechen einer Vielheit von Dingen intendierte Bedeutung des ἀριθμός verloren. An diesen Punkten setzt auch die Fortbildung bzw. die Korrektur der platonischen Lehre durch Speusipp und Xenokrates ein. Aber erst die Kritik des Aristoteles legt die Wurzel dieser sowie aller damit zusammenhängenden Schwierigkeiten bloß, nämlich die Annahme des Chorismos aller noetischen Gebilde, insbesondere auch des Chorismos der ἀριθμοὶ μοναδικοί.

## § 8.

## Die aristotelische Kritik und die Möglichkeit einer theoretischen Logistik.

Die platonische Chorismosthese findet ihre stärkste Stütze in der Mathematik. Der vorbildliche μάθημα-Charakter der mathematischen Gegenstände, ihre nicht wegzuleugnende rein noetische Beschaffenheit, ihre „Indifferenz“ gegenüber den sinnlich wahrnehmbaren Dingen — das alles deutet unmittelbar auf die Möglichkeit eines von allem Somatischen unabhängigen, „abgelösten“ Bestehens noetischer Gebilde hin, wie sie eben jene These behauptet. So ist auch der gegebene Ansatzpunkt für die aristotelische Kritik die von der platonischen Schule vertretene ontologische Auffassung des mathematischen Bereichs, insbesondere der Anzahlen von reinen Einsen (vgl. S. 71 f.). Nicht etwa stellt Aristoteles die mathematische Wissenschaft selbst in Frage — knüpft doch die aristotelische Apodeiktik vor allem an die innerhalb der Mathematik ausgebildeten Verfahren an —, nicht etwa leugnet er, daß der mathematischen Forschung ein besonderer Gegenstandsbereich zugeordnet ist, so z. B. der Arithmetik das Feld der reinen Monaden (vgl. An. post. A 10, 76 b 4 f.), — es ist ihm vielmehr darum zu tun, die platonische Auffassung von der Seinsart der mathematischen Gegenstände als falsch zu erweisen: nicht um ihr Sein, sondern um die Weise ihres Seins geht der Streit (Metaph. M 1, 1076 a 36 f.: ὥσθ' ἡ ἀμφισβήτησις ἡμῖν ἔσται οὐ περὶ τοῦ εἶναι ἀλλὰ περὶ τοῦ τρόπου).

Vergegenwärtigen wir uns kurz die Ausgangspunkte der aristotelischen Kritik, so wie sie sich aus der Analyse des in der üblichen Rede Gemeinten ergeben. Daß das Ansprechen eines „Ganzen“ dadurch möglich wird, daß man die „Teile“ angibt, „aus“ denen das Ganze „besteht“, und daß somit der aufweisenden Rede nach (τῷ λόγῳ) die Teile dem Ganzen vorangehen, bedeutet nicht, daß diesen Teilen ihrem Sein nach (τῇ οὐσίᾳ) eine Priorität gegenüber dem Sein des Ganzen zukäme (vgl.

Metaph. M 2, 1077 b 1 ff. und Δ 11, 1018 b 34 ff.). Das Ansprechen eines uns erscheinenden Gegenstandes, z. B. eines Menschen, als eines „weißen Menschen", setzt die Teilangabe „weißer" voraus, aber darum ist doch mit der Angabe „weißer" hier kein anderes Seiendes gemeint als eben: dieser weiße Mensch (vgl. dazu Metaph. Z 4, 1029 b 13 ff.). „Außerhalb" des weißen Menschen und „abgelöst" von ihm hat das hier gemeinte „Weiße" keinen Bestand. Es ist in seinem Sein an das gegebene „Ganze", nämlich „diesen weißen Menschen", gebunden. Es kann nicht bestehen, wenn es diesen Menschen nicht gibt, von dem es ausgesagt wird. Es ist also seinem Sein nach abhängig vom Sein des Menschen. — Genau so setzt die Angabe „drei Bäume" die Angabe „drei" voraus, aber das mit dieser Angabe „drei" Gemeinte hat keinen Bestand „außerhalb" der Bäume, von denen gesagt wird, daß es drei Bäume seien. Die Anzahl der Bäume, nämlich „drei", hat keine eigene, keine eigenständige φύσις (vgl. u. a. Met. M 6, 1080 a 15; 7, 1082 a 16; 8, 1083 b 22). Das „Soviel"sein der Bäume ist — wie etwa deren „Grün"-sein — an das Sein der Bäume gebunden.

Dieser aristotelischen Auffassung liegt unmittelbar die „natürliche" Bedeutung von ἀριθμός zugrunde: die Aussage, daß irgendwelche Dinge „in einer Anzahl" vorhanden seien, bedeutet nichts anderes, als daß es von einem solchen Ding gerade diese bestimmte Menge gibt (Phys. Δ 12, 221 b 14 f.: τὸ δ' εἶναι ἐν ἀριθμῷ ἐστὶ τὸ εἶναί τινα ἀριθμὸν τοῦ πράγματος . . . — vgl. oben S. 53 ff.). Nicht nur gilt es nun aber, diese „natürliche" Bedeutung des ἀριθμός niemals aus den Augen zu verlieren, es muß bei der ontologischen Bestimmung von so etwas wie „Anzahl" vor allem auch die „Abhängigkeit" des Anzahlseins berücksichtigt werden. So sehr es notwendig ist, zum Verständnis unseres vorgängigen Wissens um die Anzahlen, das sich in unserem täglich geübten Zählen und Rechnen kundgibt, Anzahlen von „reinen" Einsen anzunehmen, so wenig darf daher doch das Sein dieser „reinen" Anzahlen als ein selbständiges und „abgelöstes" begriffen werden. Die Seinsart der „reinen" Anzahlen ist eben nicht hinreichend von der „Begründung" der Möglichkeit des Zählens und Rechnens aus (platonisch gesprochen: vom λογισμὸς αἰτίας aus — vgl. Menon 98 A) zu bestimmen. Für das Anzahlsein kennzeichnend ist ja doch gerade dessen Unselbständigkeit und Gebundenheit. Die ganze Schwierigkeit besteht hier eben darin, diesen Seinscharakter aller möglichen „Anzahl", und also auch der „reinen", „mathematischen" Anzahl, mit der rein noetischen Beschaffenheit dieser letzteren in Einklang zu bringen.

Wie lassen sich — so müssen wir fragen — die einzelnen μέρη, die einzelnen „Bestandteile" eines Dinges, deren wir im λόγος nacheinander habhaft werden, z. B. „diese" „runde" „weiße" „Säule", aus dem ding-

lichen Zusammenhange, in den sie ihrer Seinsmöglichkeit nach hineingehören, herauslösen und jeder für sich gesondert betrachten? Offenbar nur so, daß wir jeweils an dem betreffenden Ding von einer Reihe von Sachbestimmungen absehen, ohne Rücksicht auf den Seinszusammenhang, der sie alle verbindet. Dieses „Absehen von . . .“ vermag eine neue Weise des Sehens herzustellen, die an den αἰσθητά etwas in den Blick kommen läßt, was bei aller Verschiedenheit und Vergänglichkeit dieser αἰσθητά keinen Wechsel erleidet, sich immer in derselben Weise verhält und folglich dem Anspruch genügt, Gegenstand eines Wissens, einer ἐπιστήμη, zu sein. Im Absehen von allem besonderen Sachgehalt der αἰσθητά gründet insbesondere die Möglichkeit, die Anzahlenbestimmungen bzw. die Größenverhältnisse der αἰσθητά einer apodeiktischen Disziplin zu unterwerfen. Darin ist begründet, wie Aristoteles sagt (Metaph. M 3, 1077 b 20 ff.), ὅτι ἐνδέχεται καὶ περὶ τῶν αἰσθητῶν μεγεθῶν εἶναι καὶ λόγους καὶ ἀποδείξεις, μὴ ᾗ δὲ αἰσθητὰ ἀλλ᾽ ᾗ τοιαδί: „daß es auch in bezug auf Körper, die Gegenstände der Sinne sind, Definitionen und Beweise [d. h. Wissenschaft] gibt, aber nicht, sofern sie solche sinnlich wahrnehmbare Körper, sondern sofern sie gerade so [nämlich so ausgedehnt bzw. so viele] sind.“ Als Gegenstände des Wissens sind dann die mathematischen Gegenstände, die stereometrischen, planimetrischen und arithmetischen Gebilde, die an den αἰσθητά gleichsam abgelesen werden, selbst nicht mehr den Sinnen unterworfen, ohne daß ihnen damit ein eigenständiges Sein, ein Sein neben dem Sein der αἰσθητά, zugesprochen wäre. Ihr Sein bleibt vielmehr an das Sein der sinnlich wahrnehmbaren Dinge gebunden. Sofern jedoch im Absehen von allen übrigen Sachgehalten die mathematischen Bestimmungen in ihrer „Reinheit“ sichtbar werden, lassen sie sich innerhalb des „Ganzen“ isolieren und unbeschadet ihrer Unselbständigkeit vom „Ganzen“ gleichsam „abheben“. Für deren genauere Erforschung bedeutet dies keine Gefahr. Denn: εἴ τις θέμενος κεχωρισμένα τῶν συμβεβηκότων σκοπεῖ τι περὶ τούτων ᾗ τοιαῦτα, οὐθὲν διὰ τοῦτο ψεῦδος ψεύσεται, ὥσπερ οὐδ᾽ ὅταν ἐν τῇ γῇ γράφῃ καὶ ποδιαίαν φῇ τὴν μὴ ποδιαίαν[1]· οὐ γὰρ ἐν ταῖς προτάσεσι τὸ ψεῦδος: „wenn man Etwas als ein von allem ihm sonst Zukommenden abgesondertes setzt und es dann als ein solches [nämlich als ein abgesondertes] untersucht, so wird daraus kein Irrtum entstehen, so wenig wie wenn man (zur Demonstration geometrischer Sätze) auf der Erde zeichnet und das, was keineswegs einen Fuß lang ist, als einen Fuß lang bezeichnet; denn nicht in den Prämissen [als solchen] liegt das Falsche“ (1078 a 17 ff.). Eine solche Betrachtungsweise führt nicht nur nicht irre, sondern läßt vielmehr das Betrachtete besonders deutlich hervortreten. Ἄριστα δ᾽ ἂν οὕτω θεωρηθείη ἕκαστον,

[1]) Zum Text vgl. Alexander z. St.; Met. N 2, 1089 a 23; An. post. A 10, 76 b 41 f. (s. auch Phys. B 2, 193 b 31—35).

εἴ τις τὸ μὴ κεχωρισμένον θείη χωρίσας, ὅπερ ὁ ἀριθμητικὸς ποιεῖ καὶ ὁ γεωμέτρης: „man bekommt ein jegliches am besten so zu Gesicht, daß man dasjenige, was als abgesondertes keinen eigenständigen Bestand hat, in der Weise setzt, daß man es absondert, wie es eben der Arithmetiker tut und der Geometer" (1078 a 21 ff.). So erst werden die mathematischen Gebilde zu Gegenständen der Wissenschaft, welcher auf diese Weise der Gehalt, das „Was" aller dieser Gebilde vorgegeben ist. Die Wissenschaft hat darüber hinaus das „Sein" der jeweiligen Urgebilde, nämlich der „Eins", der „Linie", der „Fläche" usf., „hinzunehmen" (λαμβάνειν) und daraus das „Sein" der übrigen „abzuleiten", d. h. den widerspruchslosen Zusammenhang aller vorgegebenen Gehalte der Arithmetik und der Geometrie darzutun (vgl. An. post. A 10, 76 a 31—36). Aber wie dieses „Sein" selbst hier zu verstehen ist — das zu bestimmen, kommt nicht mehr der Mathematik, sondern allein der πρώτη φιλοσοφία zu (vgl. Metaph. K 4, 1061 b 25—27). Deren Aufgabe ist es, die Gegebenheitsweise der mathematischen Gebilde auf eine vom betrachtenden Verstand vollzogene Absonderung zurückzuführen. Die sogenannte „Abstraktionstheorie" des Aristoteles ist eben nicht so sehr eine „psychologische" Erklärung gewisser Erkenntnisprozesse als der — für alle spätere Wissenschaft so folgenschwere — Versuch einer zureichenden ontologischen Bestimmung noetischer Gegenstände von der Art der μαθηματικά.

Die Wissenschaft betrachtet diese ihrem Sein nach nicht „abgelösten" Gegenstände als von den sinnlich wahrnehmbaren Dingen „abgelöst" oder abgesondert (τὰ μαθηματικὰ οὐ κεχωρισμένα ὡς κεχωρισμένα νοεῖ, ὅταν νοῇ ἐκεῖνα — De anima Γ 7, 431 b 15 f.). Die μαθηματικά haben demnach ihr „Sein" ἐξ ἀφαιρέσεως, d. h. ihre besondere Seinsart ist dadurch gegeben, daß sie von den sinnlich wahrnehmbaren Dingen „abgehoben", „abgezogen" („abstrahiert") sind. So wird verständlich, daß die „Unselbständigkeit" der mathematischen Gebilde ihrem noetischen Charakter keinen Abbruch tut. Ist doch diese „Abhebung" nur ein anderer Ausdruck für jenes „Absehen" von allem sonstigen Sachgehalt der betreffenden Dinge. In diesem „Absehen von . . ." schrumpfen gleichsam die sinnlich wahrnehmbaren Dinge zu bloßen „Stücken" bzw. „Körpern" zusammen. So werden diese Dinge ihres aisthetischen Charakters entkleidet und weitgehend ihrer individuellen Verschiedenheit beraubt (vgl. Metaph. K 3, 1061 a 28 ff.: . . . ὁ μαθηματικὸς περὶ τὰ ἐξ ἀφαιρέσεως τὴν θεωρίαν ποιεῖται (περιελὼν γὰρ πάντα τὰ αἰσθητὰ θεωρεῖ . . ., μόνον δὲ καταλείπει τὸ ποσὸν καὶ συνεχές . . .). Geht die Reduktion so weit, daß sie nicht einmal mehr als „Körper", sondern nur noch als „Stücke" betrachtet werden, so sind damit diese Dinge in indifferente, „neutrale" Monaden verwandelt. Eben diese Neutralität der zu bloßen zählbaren

„Stücken“ zusammengeschrumpften Dinge macht die „Reinheit“ der „arithmetischen“ Monaden aus, macht sie zu jenem noetischen Stoff, der der wissenschaftlichen Betrachtung unterliegt. Nicht ursprüngliche „Abgelöstheit“, sondern nachträgliche „Indifferenz“ kennzeichnet die Seinsart der reinen Anzahlen (vgl. Met. M 2, 1077 a 15—18).

Für die pythagoreische Wissenschaft wie für die platonische Philosophie war das Grundproblem der Anzahlenlehre die Frage nach der „Einheit“ eines ἀριθμός-Verbandes, die Frage, wie denn überhaupt „Vieles“ als „Eines“ verstanden werden könne. Wir sahen, wie der ganze Aufbau der griechischen theoretischen Arithmetik durch diese Fragestellung bedingt ist. Wir sahen ferner, wie die platonische Lehre von den ἀριθμοὶ εἰδητικοί eine jegliche Anzahleneinheit letztlich in der unaufteilbaren sachhaltigen Ganzheit eines γένος verwurzelt sein läßt (vgl. oben S. 87, 89f., dazu S. 60f.). Ganz allgemein kann man sagen, daß für Plato die generische Identität den letzten Grund jeder möglichen Einheit darstellt. Eben diese Anschauung ist es nun, die Aristoteles mit seinem Kampf gegen die Chorismosthese vor allem anderen zu widerlegen sucht. Nicht nur wird so die Frage nach der „Einheit“ der Anzahlen oder nach dem faktischen Einssein von Seele und Körper — oder allgemein von εἶδος und einzelnem Ding — nicht beantwortet (vgl. Metaph. Λ 10, 1075b34ff.: ... τίνι οἱ ἀριθμοὶ ἓν ἢ ἡ ψυχὴ καὶ τὸ σῶμα καὶ ὅλως τὸ εἶδος καὶ τὸ πρᾶγμα, οὐδὲν λέγει οὐδείς ... — dazu K 2, 1060 b 10—12), es wird damit auch solchen Gebilden „Einheit“ zuerkannt, wo von einem „Eins“-sein in strengem Sinne gar nicht die Rede sein kann. In der Tat meinen wir ja z. B. mit „Anzahl“ gerade mehr als bloß „Eines“: ... τὰ μὲν ἁφῇ ἐστὶν ἓν τὰ δὲ μίξει τὰ δὲ θέσει· ὧν οὐδὲν ἐνδέχεται ὑπάρχειν ταῖς μονάσιν ἐξ ὧν ἡ δυὰς καὶ ἡ τριάς· ἀλλ' ὥσπερ οἱ δύο ἄνθρωποι οὐχ ἕν τι παρ' ἀμφοτέρους, οὕτως ἀνάγκη καὶ τὰς μονάδας: „manches ist eines durch [unmittelbare gegenseitige] Berührung [seiner Teile], manches durch Mischung, manches durch Anordnung [seiner Teile]; nichts von alledem kann den Einsen zukommen, aus denen die Zwei und die Drei bestehen; sondern so, wie zwei Menschen nicht irgendeine Einheit darstellen, die neben ihnen beiden [die doch jeder für sich eines sind] Bestand hätte, so verhält es sich auch notwendig mit den [reinen] Einsen“ (M 7, 1082 a 20ff.). Was zu dieser Ansicht verführt, ist eben die Annahme der „Abgelöstheit“ der reinen Monaden: wie läßt sich in der Tat in diesem Falle die Möglichkeit einer Zusammenfassung zweier Monaden zu einem ἀριθμός-Verband anders verstehen als durch die Wirksamkeit eines ursprünglichen und damit eigenständigen εἶδος, sei es des ἄρτιον, sei es der eidetischen „Zwei“? (vgl. S. 61ff. und 89). Bieten doch diese Monaden, deren noetischer Charakter sich unmittelbar in ihrer „absoluten“ Unaufteilbarkeit kundgibt (s. S. 48), in ihrer unbegrenzten Vielheit (s. S. 56 und

59) und völligen Gleichartigkeit (s. S. 33ff.)[1]) keinerlei „natürliche" Gliederung dar, die — wie bei den immer verschiedenen und immer aufteilbaren sinnlich wahrnehmbaren Dingen — von sich aus eine gegenseitige Abgrenzung und Zusammenfassung zu einzelnen Verbänden, d. i. eben begrenzten Anzahlen, gestatten würde. Da aber die reinen „Monaden" in Wahrheit nichts als die zu bloßen zählbaren „Stücken" reduzierten sinnlich wahrnehmbaren Dinge selbst sind, so gilt von ihnen dasselbe wie von den αἰσθητά: καὶ οὐχ ὅτι ἀδιαίρετοι, διοίσουσι διὰ τοῦτο· καὶ γὰρ αἱ στιγμαὶ ἀδιαίρετοι, ἀλλ᾽ ὅμως παρὰ τὰς δύο οὐθὲν ἕτερον ἡ δυὰς αὐτῶν (ebda.): „und wenn sie (sc. die reinen Monaden) auch [schlechthin] unaufteilbar sind [im Gegensatz zu den aufteilbaren αἰσθητά], so werden sie sich deswegen doch nicht [von den αἰσθητά] unterscheiden: denn auch die Punkte [die, obzwar ebenfalls rein noetische Gebilde, doch unmittelbar durch sinnlich wahrnehmbare Zeichen «darstellbar» sind] sind unaufteilbar, und doch ist [bei zwei solchen Punkten] deren «Zweiheit» nicht etwas, was neben den zwei Punkten als ein anderes [nämlich von ihnen selbst verschiedenes «Eine»] bestünde" (vgl. auch M 9, 1085 a 23—31). Eine „Anzahl" ist eben nicht ein Ding, sondern ein „Haufen" (σωρός) von Dingen oder Monaden (vgl. Metaph. H 3, 1044 a 4; M 8, 1084 b 21 f. — s. auch oben S. 57)[2]). Das jeweilige Anzahlsein ist nicht ein κοινόν, das als etwas „Ganzes" gleichsam über und neben den Teilen eines solchen „Haufens" anzunehmen wäre (vgl. Metaph. H 6, 1045 a 8—10). Eine Anzahl ist immer nur das jeweils Gezählte oder Zählbare selbst (Phys. Δ 14, 223 a 24 f.: ἀριθμὸς γὰρ ἢ τὸ ἠριθμημένον ἢ τὸ ἀριθμητόν — vgl. Γ 5, 204 b 8). Es ist freilich wahr, daß wir in unserem Vorwissen um alle möglichen Anzahlen über indifferente Gebilde verfügen, von denen jedes einzelne uns in den Stand setzt, eine Zählung durchzuführen (ἀριθμὸς ᾧ ἀριθμοῦμεν — Phys. Δ 11, 219 b 5 ff.; 220 b 4 f.), mit dem jeweils Gezählten also nicht zusammenfällt und als je eines anzusprechen ist. Aber so wie dieses „Zur-Verfügung-Haben" — das mit Plato als κτῆσις und nicht als ἕξις zu bezeichnen wäre (Theaet. 197 B ff. — vgl. dazu Aristoteles, An. post. A 1) — sich erst im Vollzuge einer Zählung kundgibt, so wurzelt es auch in der Erfahrung gezählter Mengen, aus denen jene indifferenten Gebilde ἐξ ἀφαιρέσεως gewonnen werden. Richtet sich der Blick auf dieses Vorwissen selbst, das damit zum Range einer Wissenschaft erhoben wird (vgl. oben S. 31 ff. und 55 f.), so zeigt sich, daß wir es auch hier nur mit „Haufen" zu tun haben, nämlich mit Haufen „reiner" Monaden, die zwar als „ablösbar", nicht aber als ursprünglich abgelöst verstanden werden dürfen. Das Einssein kommt in jenem

[1]) Vgl. M 6, 1080 a 22 f.; M 7, 1081 a 19 f.

[2]) Im Gegensatz etwa zur συλλαβή (Z 17, 1041 b 11—13).

unausdrücklichen Vorwissen den Anzahlen nur soweit zu, als es jedem καθόλου zukommt. Als Gegenstände des expliziten mathematischen Wissens sind die Anzahlen „reiner" Monaden ebensowenig „eines" wie irgendeine Anzahl sinnlich wahrnehmbarer Dinge (vgl. auch Met. M 4, 1079 a 34—36)[1].

Gewiß bleibt die Frage bestehen, wodurch denn die Anzahlen als „Haufen" sich voneinander abgrenzen lassen, wie es denn möglich sei, eine Anzahl eben als eine zu bezeichnen. Doch darf diese Frage nur im Hinblick auf das jeweils wirklich Gezählte gestellt werden. Wenn wir bedenken, daß alle Zählung die Gleichartigkeit des Gezählten eben als Gezählten voraussetzt (s. S. 53 und 58), so wird auch einsichtig, daß jede Anzahl nicht nur aus vielen Einheiten besteht, viele Einsen ist (ἕνα — s. S. 57), sondern auch durch ein gemeinsames Maß zusammengehalten wird, nämlich die betreffende, der Zählung unterworfene Einheit selbst, wodurch überhaupt erst „viele Einsen" als „viele" möglich werden: πολλὰ γὰρ ἕκαστος ὁ ἀριθμὸς ὅτι ἕνα καὶ ὅτι μετρητὸς ἑνὶ ἕκαστος (Metaph. I 6, 1056 b 23f.): „denn eine jegliche Anzahl ist «vieles», weil eine jegliche Einsen ist und durch die [betreffende] Eins gemessen wird" (vgl. Phys. Δ 12, 220 b 20—22). In diesem Sinne macht die Eins (bzw. das eine der Zählung unterworfene Ding) die Zählung und damit die „Anzahl" überhaupt erst möglich, in diesem Sinne ist sie der Anzahl vorgeordnet und als deren ἀρχή anzusprechen (vgl. S. 58f. und Met. Δ 6, 1016 b 17—20; N 1, 1088 a 6—8). Die Priorität der Eins vor der Anzahl ist nicht aus dem Verhältnis der Überordnung der Gattung über die Arten zu verstehen, sondern aus dem „Maß"-Charakter der Eins. Und ebenso ist die „Einheit" einer Anzahl nicht generischer Art, sondern wurzelt in der Einheit des jeweils gezählten Dinges als des „Maßes" der betreffenden Zählung. Wir begreifen eine Anzahl als eine, weil wir die Zählung an ein und demselben Ding vornehmen, d. h. in der Zählung immer ein und dasselbe Ding vor Augen haben[2]. Das Einssein der Dinge kennzeichnet umgekehrt ihr mög-

[1]) Die Kritik an der generischen Auffassung der Einheit bei Plato beschränkt sich nicht etwa auf das Gebiet der Anzahlen, sondern durchzieht das ganze Lehrgebäude des Aristoteles. Besonders lehrreich ist in diesem Zusammenhange die Kritik am 5. Buch des „Staates", wo Plato die Forderung nach der Kinder-, Weiber- und Gütergemeinschaft genauer begründet. Auch hier handelt es sich für Plato darum, aus der Krieger- und Führerschicht der πόλις gleichsam ein einziges γένος zu schaffen, das an die Stelle der vielen Geschlechter und Familien zu treten hätte. Dadurch allein werde die größtmögliche Einheit der πόλις gewährleistet (462 A, B — vgl. 2. Buch, 375 B ff.), die als deren μέγιστον ἀγαθόν bezeichnet wird. Was Aristoteles dagegen einwendet, ist wiederum dies, daß die κοινωνία der πόλις nicht als ein ἕν zu verstehen sei. Das gerade würde die πόλις als πόλις aufheben: πλῆθος γάρ τι τὴν φύσιν ἐστὶν ἡ πόλις (Polit. B 2, 1261 a 18 — vgl. a 6 ff.).

[2]) Dieser Tatbestand bildet die Grundlage für die Analyse des χρόνος Phys. Δ 10—14.

liches Gezähltwerden, und das allein bedeutet, daß das Einssein immer als ein Unteilbarsein verstanden werden muß (τὸ ἑνὶ εἶναι τὸ ἀδιαιρέτῳ ἐστὶν εἶναι — Metaph. I 1, 1052 b 16 — vgl. I 3, 1054 a 23; ferner Phys. Γ 7, 207 b 6 f. und S. 58). Denn die Unteilbarkeit kommt einem jeglichen nur zu, sofern es als Maß einer möglichen Zählung genommen wird. Und nur sofern es als unaufteilbar verstanden wird, wird ein Ding als „eines" angesprochen (... ὅσα μὴ ἔχει διαίρεσιν, ᾗ μὴ ἔχει, ταύτῃ ἓν λέγεται ... — Δ 6, 1016 b 4—6). So ist das ἕν nicht ein κοινόν (I 1, 1053 a 14), sondern ein μέτρον (1053 b 4 f.; 1052 b 18 ff.; Λ 7, 1072 a 33; N 1, 1087 b 33 ff.). Und so ist auch die Einheit einer Anzahl von Dingen nichts anderes als die Einheit ihres „Maßes", nämlich des der Zählung unterworfenen und als solchen unteilbaren Dinges selbst. Während ganz allgemein die „Anzahl" als „eine durch die jeweilige «Eins» gemessene Menge" bestimmt werden kann: ἔστι γὰρ ἀριθμὸς πλῆθος ἑνὶ μετρητόν (I 6, 1057 a 3 f.).

So nun, wie jede Messung — von Gewichten, von Geschwindigkeiten, von Flächen, von Strecken usf. — als eine Abzählung der betreffenden Maßeinheiten verstanden werden muß (Δ 6, 1016 b 21 ff.; I 1, 1052 b 19 ff.; N 1, 1087 b 34—1088 a 2) — weshalb wir auch eine bloße Abzählung als „Messung" und das jeweils gezählte Ding als „Maß" der Zählung bezeichnen dürfen —, so pflegen wir auch jede Zählung auf einen neutralen Ausdruck zu bringen. Wir sagen nicht: ein Apfel, zwei Äpfel, drei Äpfel, sondern: eins, zwei, drei ... (vgl. M 7, 1082 b 35). Wir haben damit bereits die betreffenden Dinge in ihrer „reduzierten" Struktur, d. h. als indifferentes, eben nur noch zählbares Material vor Augen (s. oben S. 98 f.). Indem wir dieses Verfahren zum Range einer Wissenschaft erheben, nämlich das Zählen und Rechnen nur noch auf „reine" Monaden erstrecken[1]), machen wir das Eins- und Unteilbarsein der Dinge als solches zum Gegenstand der Betrachtung. Denn die mathematische μονάς ist gar nichts anderes als der von den Dingen „abgehobene" Maßcharakter als solcher. Darum versteht eben der Arithmetiker die μονάς als „das schlechthin Unteilbare" (πάντῃ ἀδιαίρετον — I 1, 1053 a 1 f.; Δ 6, 1016 b 25), womit sie auch als das schlechthin genaue (ἀκριβέστατον — 1053 a 1) Maß gegeben ist. Darin gerade ist die universelle „Anwendbarkeit" der „reinen" Anzahlen begründet. ἓν μὲν γὰρ καὶ ἀδιαίρετον ὁ ἄνθρωπος ᾗ ἄνθρωπος· ὁ δ' ἔθετο ἓν ἀδιαίρετον, εἶτ' ἐθεώρησεν εἴ τι τῷ ἀνθρώπῳ συμβέβηκεν ᾗ ἀδιαίρετος: „eins und unteilbar ist [z. B.] der Mensch als Mensch; der [Arithmetiker] aber hat die [schlechthin] unteilbare Eins [nämlich die μονάς] gesetzt [und zwar als «abgelöst» — s. oben S. 97 f.] und sieht dann zu, was immer dem

[1]) M 8, 1083 b 16 f.: ἀλλὰ μὴν ὅ γ' ἀριθμητικὸς ἀριθμὸς μοναδικός ἐστιν.

Menschen zukommt, sofern er unteilbar ist" (M 3, 1078 a 23—25), d. h. sofern er als „Einheit" irgendwelchen Zählungen oder Berechnungen unterliegt. Und genau dasselbe läßt sich offenbar von jedem beliebigen zählbaren Seienden sagen. —

Die ontologische Auffassung der μαθηματικά, insbesondere der „reinen" Anzahlen, wie sie uns bei Aristoteles begegnet, übt nun auch einen Einfluß auf die Gestaltung der mathematischen Wissenschaft selbst aus. Was zunächst die theoretische Arithmetik anbelangt, so muß hier offensichtlich dem εἶδος-Begriff eine wesentlich geringere Bedeutung als in der pythagoreisch-platonischen Fassung zukommen. Die εἴδη der Anzahlen können nicht mehr als einheitsstiftende und damit den Anzahlbereich eindeutig gliedernde Gebilde verstanden werden (vgl. S. 59ff.). Wenn überhaupt, so müssen hier als εἴδη — und zwar im „abgeleiteten" Sinne (vgl. Metaph. Z 4, 1030 a 18—27) — bereits die einzelnen Anzahlen selbst gelten (vgl. An. post. B 13, 96 b 15ff.: χρὴ δέ, ὅταν ὅλον τι πραγματεύηταί τις, διελεῖν τὸ γένος εἰς τὰ ἄτομα τῷ εἴδει τὰ πρῶτα, οἷον ἀριθμὸν εἰς τριάδα καὶ δυάδα . . .). Das „Gerade", „Ungerade", „Geradungerade" usw. dagegen sind nur noch als ἴδια πάθη der Anzahlen zu bezeichnen (vgl. S. 44, Anm. 1). Sie stellen jeweils nur eine ποιότης[1]) der betreffenden Anzahl dar, so z. B. den Charakter der „zusammengesetzten" Anzahl, also der „ebenen" oder „körperlichen" Anzahl (im Gegensatz zum Charakter der „Primzahl", der „linearen" Anzahl), während als οὐσία dieser Anzahl — οὐσία wiederum im „abgeleiteten Sinne" verstanden — die Menge der Einheiten als solche, also z. B. „sechs", anzusprechen ist. In der Tat: das, was eine jegliche Anzahl in ihrem Anzahlsein ist, ist eben das Wieviel, das sie angibt; so sind „sechs" Einheiten nicht an ihnen selbst „zwei mal drei" Einheiten oder „drei mal zwei" Einheiten, was vielmehr nur ihre „Zusammengesetztheit" anzeigt, sondern „einmal" — „sechs" (οὐσία γὰρ ἑκάστου [sc. ἀριθμοῦ] ὃ (statt τὸ — Bonitz, Ross) ἅπαξ, οἷον τῶν ἓξ οὐχ ὃ δὶς ἢ τρὶς εἰσίν, ἀλλ' ὃ ἅπαξ· ἓξ γὰρ ἅπαξ ἕξ — Metaph. Δ 14, 1020 b 7f.; dazu b 3—7[2])). — Die „arithmetischen" Bücher Euklids (VII, VIII, IX) spiegeln unmittelbar diesen Wandel der ontologischen Grundlage. Die geometrische Form der Darstellung ist nicht nur durch die Rücksicht auf das große Problem der „Inkommensurabilität" nahegelegt, das eine durchgängige „Geometrisierung" der griechischen Mathematik erzwingt (vgl. S. 51). Die „reinen" Einsen, aus denen sich die zu betrachtenden Anzahlen zusammensetzen,

---

[1]) Diese ποιότης ist als διαφορὰ οὐσίας bestimmt, denn: ταύτης δέ τι καὶ ἡ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ποιότης μέρος· διαφορὰ γάρ τις οὐσιῶν, ἀλλ' ἢ οὐ κινουμένων ἢ οὐχ ᾗ κινούμενα — 1020 b 15—17 (vgl. auch Top. Z 4, 142 b 9f.).

[2]) Vgl. Plato, Theaet. 204 B, C.

werden hier eben nur noch als „Maßeinheiten“ verstanden, die sich am einfachsten durch unmittelbar ausmeßbare gerade Linien (und nicht durch Punkte — vgl. besonders Metaph. M 8, 1084 b 25—27) darstellen lassen, ganz unabhängig davon, ob sie eine „lineare“ (Primzahl), „ebene“ oder „körperliche“ Anzahl bilden[1]. In dieselbe Richtung weisen auch die Definitionen 8, 9, 11, 12, 14 des 7. Buches (nämlich des ἀριθμὸς ἀρτιάκις ἄρτιος, ἀρτιάκις περισσός, περισσάκις περισσός, πρῶτος und σύνθετος), die die Beschaffenheit der betreffenden Anzahlen mit Rücksicht auf den Maßcharakter ihrer Faktoren bestimmen (vgl. auch Def. 3 und 5), was zum mindesten bei Nikomachos und bei Domninos tunlichst vermieden wird[2]. Hervorzuheben ist, daß sich die „geradgeraden“, „geradungeraden“ und „ungeradgeraden“ Anzahlen gemäß den euklidischen Definitionen nicht gegenseitig ausschließen (vgl. IX, 32—34)[3]. In Verbindung mit der Kritik, die Jamblich (Pistelli 20ff.) an diesen Definitionen übt, zeigt dies besonders deutlich, daß es sich hier nicht mehr um eine (mehr oder weniger eindeutige) klassifizierende Gliederung des Anzahlbereichs, sondern nur noch um die Bestimmung charakteristischer Eigenschaften der Anzahlen handelt. Aus demselben Grunde kann Euklid mit Aristoteles (Top. Θ 2, 153 a 39 f.) die „Zwei“ unter die πρῶτοι ἀριθμοί rechnen, was für die neuplatonischen Arithmetiker nicht möglich ist (s. besonders Theon 24, 4—8)[4].

Aus der aristotelischen ontologischen Auffassung läßt sich aber noch eine andere, in unserem Zusammenhange weit wesentlichere Folgerung für das Problem der theoretischen Logistik ziehen. Wir sahen (S. 47 ff.), daß die entscheidende Schwierigkeit der theoretischen Logistik

---

[1]) Diese Darstellung könnte freilich auch von Theaetet selbst (bzw. Theodoros) stammen (vgl. S. 50 f.), wenn man bedenkt, in welcher Weise Plato ihn seine Einteilung der Anzahlen auseinandersetzen läßt (Theaet. 147 C ff. — vgl. S. 59 f.). Bei Theaetet scheint sich eben die Wandlung der ontologischen Auffassung der μαθηματικά vorzubereiten, die dann über Eudoxos zur aristotelischen Lehre führt. — Das Ergebnis dieser Entwicklung führt zur Umkehrung der „pythagoreischen“ These, wonach die Meßbarkeit der Dinge in ihrer Zählbarkeit begründet sei (vgl. S. 70): die Zählbarkeit wird vielmehr umgekehrt nur als — ein nicht einmal immer vollständiger — Ausdruck der Meßbarkeit verstanden (vgl. S. 102). — Die Stellung Platos ist durch die Auseinandersetzung mit diesen beiden Extremen bestimmt, nur daß er grundsätzlich an der „pythagoreischen“ These orientiert bleibt, wie namentlich der „Timaios“ in seinem Inhalt und seinem Aufbau beweist. — Über das Verhältnis Euklid — Aristoteles — Theudios (insbesondere auch der κοινὰ ἀξιώματα bei Aristoteles und der κοιναὶ ἔννοιαι bei Euklid [dazu Proklus in Eucl. 194, 7—9]) vgl. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles, in Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., Heft 18, 1904.

[2]) Bei Theon dagegen macht sich auch in dieser Hinsicht der Einfluß des Peripatetikers Adrast geltend (vgl. S. 40).

[3]) Dazu Heiberg, Litter.-Gesch. Studien über Euklid, 1882, S. 197 ff.

[4]) Mit Ausnahme des Domninos, der hierin Euklid folgt (vgl. oben S. 41).

als der Lehre von den aller Rechnung zugrunde liegenden gegenseitigen Beziehungen der Anzahlen im Begriff der Monade liegt, sofern diese als ein eigenständiges und als solches schlechthin unaufteilbares Gebilde verstanden wird. Die aristotelische Kritik hebt diese Schwierigkeit auf, indem sie zeigt, daß die „Unteilbarkeit" nicht der μονάς als einem für sich bestehenden ἕν zukommt, sondern mit dem Maßcharakter jeder möglichen Einheit, mag sie aisthetischer oder noetischer Natur sein, unlösbar verknüpft ist. Damit erst wird eine ganze Reihe „angewandter" Wissenschaften, wie sie von der Alexandrinischen Schule gepflegt worden sind, eben als „Wissenschaften" möglich (vgl. Phys. B 2, 194 a 7 ff.). Die „Metrik" des Heron von Alexandrien z. B. geht unmittelbar von folgender Festsetzung aus (Schöne [Opera III], A, Prooem., 6, 4 ff.): ἵνα οὖν μὴ καθ' ἑκάστην μέτρησιν πόδας ἢ πήχεις ἢ τὰ τούτων μέρη ὀνομάζωμεν, ἐπὶ μονάδων τοὺς ἀριθμοὺς ἐκθησόμεθα· ἐξὸν γὰρ αὐτὰς πρὸς ὃ βούλεταί τις μέτρον ὑποτίθεσθαι: „damit wir nun nicht bei jeder Messung Fuße oder Ellen oder deren Teile zu nennen brauchen, werden wir in der Darstellung die Zählungen an [indifferenten] Monaden durchführen; denn man kann dieselben jeder beliebigen Maßeinheit unterlegen"[1]). Nichts hindert nun im Verlauf der Rechnung die Maßeinheit selbst in der Weise zu ändern, daß sämtliche Bruchteile der ursprünglichen Einheit sich in „ganze" Anzahlen (der neuen Maßeinheiten) verwandeln. Eben deshalb lassen auch die Brüche selbst eine „wissenschaftliche" Behandlung zu. Wenn wir davon absehen, daß die platonische Forderung einer theoretischen Logistik von einem anderen Problemzusammenhang aus in der allgemeinen Proportionenlehre ihre Verwirklichung findet (vgl. S. 52), so läßt sich nicht verkennen, daß die aristotelische Auffassung der μαθηματικά damit also auch jene theoretische Logistik möglich macht, die von der Chorismosthese aus notwendig postuliert werden muß und sich doch gerade durch sie als undurchführbar erweist. Wir besitzen auch ein bedeutsames Dokument, das uns eine konkrete Vorstellung vom Typus einer theoretischen Logistik auf peripatetischer Grundlage vermittelt. Es ist dies eben das „arithmetische" Lehrbuch des Diophant.

---

[1]) Vgl. z. B. Metr. B 11 (Schöne 120, 27 ff.), wo μονάδες, mit Stereom. I (Schmidt-Heiberg [Opera V] 2, 3 ff.), wo bei der gleichen Aufgabe πόδες zugrunde gelegt werden, usf. Vgl. auch Geometr. 12 (Opera IV, 236 ff.), wo die aus der Rechnung sich ergebenden μονάδες sofort durch die in Frage kommenden Längenmaße ersetzt werden. — Die uns unter dem Titel „Geometrica" und „Stereometrica" überlieferten Schriften, stellen keine genuinen Werke Herons dar, sondern Lehrbücher, die, aus verschiedenen — vor allem freilich Heronischen — Schriften zusammengestellt, mit der Zeit umgeändert und mit immer neuen Zusätzen versehen wurden. So ist auch die „Metrik" Herons in ihnen verwertet (vgl. Opera V, S. XXI, XXIV f., XXIX, XXXII).

# Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra.

Von Jacob Klein.

## II. Teil.*)

### Inhaltsverzeichnis.



## § 9.

## Über die Differenz antiker und moderner Begrifflichkeit.

Die Ergebnisse unserer bisherigen Untersuchung setzen uns in den Stand, das Werk Diophants von den allgemeinsten begrifflichen Voraussetzungen der griechischen Arithmetik und Logistik aus zu interpretieren. Wir geraten damit freilich in Gegensatz zu den üblichen Darstellungen der Diophantischen „Arithmetik“, die in ihr eine Vorstufe unserer Algebra und damit eine Vorstufe der modernen symbolischen Mathematik überhaupt erblicken. Diese Deutung Diophants ist — wie wir sehen werden — aufs engste mit der Selbstauffassung der modernen Mathematik seit Vieta, Stevin und Descartes verknüpft, und diese wiederum wird wesentlich von einer bestimmten Um-inter-

---

*) Teil I s. Quellen u. Studien B 3, S. 18—105.

pretation der antiken Mathematik (wie der antiken Wissenschaft insgesamt) getragen. Sich diese Umdeutung klar machen heißt nichts anderes als einen neuen Zugang zur griechischen Anzahlen-Lehre gewinnen. Wir haben eben dies in dem 1. Teil der vorliegenden Arbeit zu tun versucht. Doch müssen wir in diesem Zusammenhang — zum besseren Verständnis des Folgenden — noch einige grundsätzliche Erwägungen anstellen.

Die Schwierigkeiten eines angemessenen Verständnisses der griechischen Anzahlen-Lehre sind — wie kaum hervorgehoben zu werden braucht — zunächst einmal in unserer eigenen Begrifflichkeit begründet. Allgemein wird daher auch die Notwendigkeit anerkannt, ja betont, bei der Interpretation der einschlägigen Texte sich möglichst aller modernen Begriffe zu enthalten. Es ist freilich klar, daß die Möglichkeit einer nicht auf modernen Voraussetzungen beruhenden Interpretation antiker Texte immer nur eine beschränkte sein kann: selbst wenn wir gänzlich von unserer heutigen wissenschaftlichen Terminologie absehen können, ist es doch ungeheuer schwierig, das Medium der durchschnittlichen Begrifflichkeit zu verlassen, die unserer — im Wesentlichen durch die letzten drei Jahrhunderte bestimmten — Denkweise entspricht. Andererseits ist es ja keineswegs so, daß uns die antike Denk- und Auffassungsweise gänzlich „fremd" und völlig verschlossen wäre. Das Verhältnis unserer Begriffe zu denen der Antike ist eben von eigentümlich gebrochener Art: unser verstehendes Verhalten zur Welt fußt auf dem von der griechischen Wissenschaft eroberten Boden, ohne doch in derselben Weise an die Voraussetzungen gebunden zu sein, die für deren Ausbildung maßgebend waren. Um über unsere eigenen begrifflichen Voraussetzungen Klarheit zu gewinnen, müssen wir uns ständig die Verschiedenheit der Situationen vor Augen halten, in denen sich unsere Wissenschaft und die der Griechen befinden.

In der ἐπιστήμη der Griechen wird erstmalig die Möglichkeit „erkennenden" und „wissenden" Verhaltens erfaßt, nämlich die Möglichkeit des Menschen, von allen Zielen abzusehen, die sonst sein Tun bestimmen mögen, sich frei von allem Zwang, in völliger Muße der Betrachtung hinzugeben und in der Betrachtung selbst sein Glück zu finden. Diese Möglichkeit wird von der Verhaftung in die Beschäftigung des Tages abgehoben. Wissenschaft steht hier in ursprünglicher Weise dem nicht-wissenschaftlichen Verhalten gegenüber, aus dem sie erwächst und in dem sie ihre eigenen Wurzeln findet. Indem sie sich von diesem Verhalten abzuheben sucht, werden dessen faktische Grundlagen nicht angetastet. Daher ist es möglich und notwendig, die griechische Wissenschaft von dieser ihrer „natürlichen" Basis aus verstehen zu lernen. Sie selbst stellt in ihrer Ge-

samtheit den Zusammenhang „natürlicher“ Erkenntnis dar, wie sie im vorwissenschaftlichen, sich in Meinungen bewegenden, von einem vor-begrifflichen Weltverständnis getragenen Verhalten angelegt ist.

Ganz anders ist die Situation unserer, der „neuen“ Wissenschaft, deren Fundamente im 16. und 17. Jahrhundert gelegt werden. Für sie ist die „natürliche“ Grundlage durch eine bereits bestehende Wissenschaft ersetzt, deren Prinzipien bestritten, deren Methoden abgelehnt, deren „Erkenntnisse“ verlacht werden, deren Stellung im Zusammenhange des menschlichen Lebens aber allem Zweifel entrückt ist. Die scientia erscheint als ein unverlierbares Gut des Menschen, das zwar beeinträchtigt und verzerrt, aber niemals in Frage gestellt werden kann. Von dieser in ihrem grundsätzlichen Geltungsanspruch anerkannten Wissenschaft aus und im Kampf gegen ihre Begriffe und Methoden wird nun das Gebäude der „neuen“ Wissenschaft errichtet. Gewiss ist es richtig, wie immer wieder betont wird, daß die Begründer dieser „neuen“ Wissenschaft, Männer wie Galilei, wie Stevin, wie Kepler, wie Descartes, von einem ursprünglichen, der gelehrten Schulwissenschaft ganz fremden Impuls getragen werden. An praktisch-mechanischen, an praktisch-optischen Problemen, an Problemen der Architektur, des Maschinenbaus, der Malerei, der neuerfundenen instrumentalen Optik entzündet sich zumeist das wissenschaftliche Interesse dieser Männer und ihrer unmittelbaren Vorläufer[1]). Aber nicht minder wahr ist, daß die begriffliche Fassung der neuen Einsichten überall an die alten traditionellen Begriffe anknüpft. Der Anspruch, wahre Wissenschaft, echtes Wissen zu vermitteln, bedingt ganz von selbst eine ständige Orientierung an dem überlieferten festgefügten Wissenschaftsgebäude. Die „neue“ Wissenschaft teilt mit der Schulwissenschaft die allgemeinsten Voraussetzungen wissenschaftlichen Verhaltens, die von der griechischen Wissenschaft in Abhebung von dem „natürlichen“ Dasein erarbeitet worden sind. Darüber hinaus geht sie zu den von der Schulwissenschaft vernachlässigten Quellen der griechischen Wissenschaft zurück, — aber sie interpretiert sowohl jene Voraussetzungen wie diese Quellen von einem der antiken Wissenschaft durchaus fremden Boden aus. Und diese Interpretation des alten Lehrguts, die eine charakteristische Abwandlung aller antiken Begriffe mit sich bringt, liegt der gesamten Begriffsbildung unserer Wissenschaft und der durch sie bestimmten durchschnittlichen Begrifflichkeit zu Grunde.

Was nun die Situation der „neuen“ Wissenschaft besonders kennzeichnet und für ihren Aufbau besonders wichtig erscheint, ist die Auffassung, die sie von ihrem eigenen Tun hat. Sie be-

[1]) Besonders eindringlich ist dies zuletzt von Leonardo Olschki in seiner „Geschichte der neusprachlichen wissenschaftlichen Literatur“ dargestellt worden: bisher 3 Bände, 1919—1922—1927.

greift sich selbst als Wiederaufnahme und vor allem Weiterentwicklung der griechischen Wissenschaft, als Wiederholung und Ausgestaltung der „natürlichen“ Erkenntnis also. Sie versteht sich selbst nicht nur als Wissenschaft von der Natur, sondern als „natürliche“ Wissenschaft — im Gegensatz zur Wissenschaft der Schule. Während die „Natürlichkeit“ der griechischen Wissenschaft durch die Abhebung von ihrer natürlichen Grundlage bestimmt ist und eben dadurch an diese gebunden bleibt, ist die „Natürlichkeit“ der modernen Wissenschaft Ausdruck ihrer polemischen Stellung zur Schulwissenschaft. Diese besondere Situation der „neuen“ Wissenschaft bestimmt von Grund auf ihren Horizont, ihre Methoden, ihre allgemeine Struktur. Sie bestimmt vor allem den Begriffscharakter ihrer Begriffe als solcher.

Die Gewinnung eines Begriffs vollzieht sich in der griechischen Wissenschaft in steter Anlehnung an die „natürliche“ vor-wissenschaftliche Erfahrung, von der der wissenschaftliche Begriff abgehoben wird. Der Sinn dieser Abhebung, durch die der besondere Begriffscharakter eines jeden Begriffs überhaupt erst bestimmt wird, ist so das vordringliche ontologische Problem der Antike, das dann in der Universalienfrage des Mittelalters schematisiert wird und allmählich völlig verblaßt. — Die „neue“ Wissenschaft dagegen gewinnt im allgemeinen ihre Begriffe in der Auseinandersetzung mit den ihr überlieferten Begriffen der Schulwissenschaft. Nicht mehr besteht hier für jeden dieser Begriffe eine — mit der menschlichen Rede gegebene — natürliche Mehrdeutigkeit, wonach sich stets ihr präziser Sinn von einer Reihe weniger präziser Bedeutungen unterscheiden ließe. Nicht mehr ist das in diesen Begriffen Vermeinte unmittelbar einsichtig. Erst der innere Zusammenhang der Begriffe, ihr Aufeinanderbezogensein, ihr Eingeordnetsein in das gesamte Gebäude der Wissenschaft gibt einem jeden von ihnen einen eindeutigen Sinn und erschließt das Verständnis für ihren allein in Frage kommenden, spezifisch wissenschaftlichen Gehalt. Indem die „neue“ Wissenschaft sich ihre eigenen Begriffe im Kampf mit der Wissenschaft der Schule erarbeitet, interpretiert sie auch die von der Schule überlieferten Begriffe der griechischen Wissenschaft nicht mehr von deren „natürlichen“ Basis aus, sondern vor allem im Hinblick auf die Funktion, die jeder dieser Begriffe im Ganzen der Wissenschaft ausübt. So ist jeder der neu gewonnenen Begriffe durch die Reflexion auf die Totalität des Begriffszusammenhanges bestimmt. Jeder Begriff der „neuen“ Wissenschaft gehört nun einer neuen begrifflichen Dimension an. Die besondere Begrifflichkeit des jeweiligen Begriffs stellt kein Problem mehr dar: sie ist für alle Begriffe unterschiedslos dieselbe, sie ist das allgemeine, von der Reflexion nicht mehr erreichte Medium, in dem sich der Aufbau der wissenschaftlichen Welt vollzieht.

Wir haben es in der vorliegenden Arbeit nur mit der Geschichte der Begriffsbildung innerhalb eines bestimmten Wissenschaftsgebietes, nämlich des mathematischen, zu tun. Das oben Gesagte gilt hier darum nicht minder. Ist doch die Entwicklung der Mathematik von der allgemeinen Geschichte des Weltverständnisses gar nicht zu isolieren, — wie groß auch die Bestrebungen sein mögen, die Mathematik zu einer in sich selbst geschlossenen, von aller sonstigen Wissenschaft unabhängigen Disziplin auszugestalten. Ja, mehr als das: die Art der Modifikation, die die mathematische Wissenschaft des 16. und des 17. Jahrhunderts mit den Begriffen der antiken Mathematik vornimmt, ist vorbildlich für den Gesamtentwurf menschlichen Wissens in der neueren Zeit. Wir meinen den Zusammenhang, der zwischen der Art der „Generalisierung" in der „neuen" Wissenschaft und ihrem „Kunst"-Charakter besteht.

Seinen angemessensten Ausdruck gewinnt dieser Zusammenhang in der symbolischen Formelsprache und Rechentechnik der modernen Mathematik. Wir werden ihm im Folgenden überall begegnen. Insbesondere ist dieser Zusammenhang auch für die moderne Interpretation der antiken Mathematik maßgebend gewesen. Nicht erst seit Zeuthen, der freilich als erster diesen Begriff konsequent zur Anwendung bringt, wird die antike Darstellungsweise mathematischer Sachverhalte als „geometrische Algebra" verstanden[2]). Möglich ist diese Deutung — wie wir vorwegnehmend sagen dürfen — grundsätzlich nur darum, weil sie nicht genügend zwischen der Allgemeinheit des Verfahrens und der Allgemeinheit des Gegenstandes, dem dieses Verfahren gilt, unterscheidet. So verbindet Zeuthen mit seinem Begriff der „geometrischen Algebra" unmittelbar den der „allgemeinen Größe", und zwar in der Weise, daß jene „geometrische Algebra" als allgemeines Verfahren eben die „allgemeine Größe" zum eigentlichen Gegenstande habe[3]). Damit wird mit einem Schlage über die ganze antike Problematik, die sich an die Frage nach der Seinsweise der mathematischen Gegenstände selbst knüpft, hinweggegangen. Die antike Mathematik ist gerade durch die Spannung zwischen Verfahren und Gegenstand gekennzeichnet, wobei die jeweiligen Gegenstände (geometrische Figuren und Kurven, Beziehungen zwischen denselben, Verhältnisse zwischen kommensurablen und inkommensurablen geometrischen Größen, Anzahlen, Anzahlenverhältnisse) den Ausgangs- und Zielpunkt des Verfahrens abgeben, und zwar im besonderen auch dann,

[2]) vgl. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, 1886, S. 6f., ferner Teil I, S. 66 und weiter unten S. 162, S. 174, Anm. 109, S. 219 und S. 228.

[3]) a. a. O., S. IX; S. 3 ff. — vgl. auch Zeuthen, Sur la constitution des livres arithmétiques d'Euclide . . . (Oversigt over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1910), S. 404.

wenn es sich um einen „Existenz"-Nachweis handelt, um den Nachweis nämlich, daß das „Sein" der fraglichen Gegenstände „möglich", d. i. widerspruchsfrei ist (vgl. Teil I, S. 98). Die Frage der „allgemeinen" Anwendbarkeit eines Verfahrens bedeutet somit die Frage nach dem καθόλου der mathematischen Gegenstände selbst, die letztlich nur von einer Ontologie der mathematischen Gegenstände zu beantworten ist. Die moderne Mathematik dagegen — und damit auch die moderne Interpretation der antiken Mathematik — richtet ihr Augenmerk vor allem auf das Verfahren als solches. Sie bestimmt allererst ihre Gegenstände aus der Reflexion über die Art, in der diese Gegenstände im allgemeinen Verfahren zugänglich werden. So wird auch aus der „Allgemeinheit" der Liniendarstellung in den „arithmetischen" Büchern Euklids, nämlich aus dem Umstand, daß mit ihrer Hilfe alle ἀριθμοί in ihren möglichen Beziehungen zueinander erfaßt werden, geschlossen, sie habe es mit einer „allgemeinen Größe" zu tun. Das Charakteristische an dieser „allgemeinen Größe" ist ihre Unbestimmtheit, die als solche sich überhaupt nur innerhalb eines symbolischen Verfahrens begrifflich fassen läßt. Die euklidische Darstellung ist aber nicht symbolischer Art. Sie meint jeweils bestimmte Anzahlen von Maßeinheiten und zwar ohne den Umweg über eine „allgemeine Vorstellung" oder den Begriff einer „allgemeinen Größe". Indem sie die jeweils bestimmte Anzahl von Maßeinheiten durch eine Maßstrecke veranschaulicht, tut sie zweierlei nicht, was den Lebensnerv des symbolischen Verfahrens ausmacht: sie identifiziert nicht den dargestellten Gegenstand mit dem Mittel seiner Darstellung und sie ersetzt nicht die Bestimmtheit des Gegenstandes durch seine mögliche Bestimmtheit, die in einem diese mögliche Bestimmtheit anzeigenden, nicht etwa veranschaulichenden Zeichen ihren Ausdruck findet. Wenn bei Euklid die Liniendarstellung in den „arithmetischen" Büchern bereits durch das Thema des 10. Buches, mit dem die ersteren in „systematischem" Zusammenhang stehen, gefordert wird (vgl. Teil I, S. 50 f.), so ist doch eben trotz des gleichen Verfahrens in allen diesen Büchern der Gegenstand hier und dort ein verschiedener: in den Büchern VII—IX handelt es sich um Anzahlen, die ihrer Definition nach stets kommensurabel sind (vgl. VII, Def. 2, 14—16), im 10. Buch dagegen um Größen, deren Verhältnis sich nicht auf ein Anzahlenverhältnis reduzieren läßt (vgl. X, 5—8) und die eben darum inkommensurabel sind. Und wenn wiederum in den arithmetischen Büchern ein arithmetischer — genauer: logistischer — Satz mit Hilfe der Liniendarstellung allgemein bewiesen wird, so entspricht diesem allgemeinen Beweis keineswegs eine „allgemeine Anzahl" oder der Begriff einer „allgemeinen" — und damit also auch „unbestimmten" —

Anzahl (vgl. dazu vor allem Aristoteles, An. post. A 24, 85a 31—b 3). Aus dem 2. Buch des Pappus (Hultsch I, S. 2 ff.), wo dieser das Zähl- und Rechensystem des Apollonius wiedergibt und kommentiert (vgl. Teil I, S. 41, Anm. 3), können wir vielmehr unmittelbar entnehmen, in welcher Weise die allgemeine Liniendarstellung (τὸ γραμμικόν) jeweils nur bestimmte Anzahlen meint (vgl. hierzu die Erläuterungen von Hultsch, III, 1213—1216)[4]. Indem noch dazu hier — wie bei Euklid — die einzelnen Linien durch einen Buchstaben gekennzeichnet werden, wird es möglich, die gemeinten Anzahlen durch diese Buchstaben darzustellen. Das bedeutet aber durchaus nicht die Einführung eines symbolischen Bezeichnungsverfahrens. Die Verwendung von Buchstaben zur Kennzeichnung von Größen und Anzahlen scheint bereits bei Archytas vorzuliegen (vgl. Tannery, Mém. scient. III, 249 und auch Teil I, S. 46, Anm. 3). Zu der Art, in der hier die Buchstaben auftreten, bemerkt Tannery (a. a. O., 249 — vgl. auch III, 158): „la lettre remplace bien un nombre quelconque . . ., mais seulement là où ce nombre est supposé placé; elle n'en symbolise pas la valeur et ne se prête pas aux opérations" (von mir gesperrt)[5]. Von dieser mathematischen Buchstaben-Verwendung machte auch Aristoteles z. B. in der „Physik" und in „De coelo" Gebrauch und übertrug sie sogar auf seine „logischen" und „ethischen" Untersuchungen. Niemals aber haben wir es dabei mit „Symbolen" zu tun, in dem Sinne, daß das mit dem Symbol Angezeigte in sich selbst ein „allgemeines" Gebilde wäre[6].

Wir werden im Folgenden der begrifflichen Wandlung nachzugehen haben, die den antiken ἀριθμός als „Zahl" und damit zugleich als „allgemeine Größe" erscheinen läßt. Diese Wandlung kündigt sich bereits seit dem Ausgang des Mittelalters in dem zunehmenden Interesse für die „praktischen" mathematischen Disziplinen an. Im Gegensatz zur „theoretischen" Arithmetik und Geometrie (arithmetica et geometria speculativa), wie sie vor allem Boethius aus neu-

---

[4]) Das trifft genau so für das Verhältnis der einen ἀπόδειξις zu den unendlich vielen Lösungen bei Diophant zu (vgl. S. 138): die ἀπόδειξις ist als solche allgemein, sie liefert aber jeweils nur ganz bestimmte Anzahlen.

[5]) Das gilt für die Verwendung von Buchstabengrößen bis ins 16. Jahrh. hinein (vgl. Tropfke II³, S. 48 f.).

[6]) Das ist insbesondere auch nicht der Fall bei den μυριάδες ὁμώνυμοι τῷ κ, d. h. den κ-fachen Myriaden, des Apollonius bzw. Pappus (Hultsch I, Prop. 23, S. 14, 27 f. —15, 1 f.; Prop. 25, S. 18, 9 f.—18, 20 ff. — vgl. auch weiter unten S. 137), von denen Cantor (I³, 347) meint, daß sie eine „hochbedeutsame Allgemeinheit" darstellten. — Die Spannung zwischen Verfahren und Gegenstand drückt sich unmittelbar in einer fundamentalen Differenz zwischen der „Analysis" und der „Synthesis" aus, auf die wir in § 11, Abschnitt C 2, einzugehen haben werden. Das oben Gesagte wird hier noch eine nachträgliche Bestätigung finden.

pythagoreischen bzw. neuplatonischen Quellen dem Mittelalter überliefert, werden jetzt die entsprechenden „praktischen" Disziplinen: Logistik und Meßkunde (arithmetica et geometria practica) bevorzugt (vgl. Teil I, § 2). Diese Disziplinen werden folgerichtig als „artes" verstanden: sie erlernen heißt sich die entsprechenden „Kunstregeln" aneignen. Das „kunstgerechte Verfahren", die „practica" oder die „praxis" des Rechnens und Messens bildet hier den Gegenstand der Lehre. In dem bedeutungsvollen Augenblick nun, in dem diese Disziplinen sich ein Heimatrecht in der „offiziellen" Wissenschaft erkämpfen, wird dieser ihr „Kunst"-Charakter als ihre eigentliche „theoretische" Würde angesehen[6a]). In eins damit verwandelt sich die Struktur der Gegenstände, mit denen es die Mathematik zu tun hat. Eine neue Art der Generalisierung, die sich als „symbolische Abstraktion" verstehen läßt, führt unmittelbar zur Konstitution einer universalen Disziplin, nämlich der „allgemeinen Analytik", der im architektonischen Zusammenhang der „neuen" Wissenschaft eine zentrale Stellung zuzuweisen ist. Und dieser ganze Vorgang, den im Einzelnen darzustellen, unsere Aufgabe ist, wird wesentlich durch die Rezeption der Diophantischen „Arithmetik" ausgelöst.

## § 10.

## Diophants „Arithmetik" als theoretische Logistik. Der εἶδος-Begriff bei Diophant.

In den uns unter dem Titel Ἀριθμητικά überlieferten 6 Büchern Diophants[7]) — Diophant selbst spricht in der Vorrede (16, 7) von 13 Büchern — wird im Wesentlichen die Auflösung von Rechenaufgaben gelehrt, die uns heute als bestimmte und unbestimmte Gleichungen

[6a]) Diese Identifikation wird gewiß auch durch die traditionelle Zugehörigkeit der mathematischen Disziplinen zu den „artes liberales" nahegelegt. Auch im Mittelalter gelten die „artes liberales" — und speziell also die Arithmetik und die Geometrie — als „theoretische" Disziplinen, jedoch eben im ausdrücklichen Unterschied zu den „praktischen" „artes mechanicae" (vgl. z. B. Thomas von Aquin, Summa Theol. II, 1, Qu. 57, Art. 3: „. . . sicut artes mechanicae sunt practicae, ita artes liberales sunt speculativae"). Nun enthält freilich gerade die überlieferte „Arithmetik" von vornherein wesentliche „logistische" Elemente, die das „praktische" Rechnen „theoretisch" begründen (vgl. Teil I, S. 32; 46 f.; 51), so daß hier die Grenze auch gegenüber der Logistik als Rechenkunde nur sehr schwer zu ziehen ist (vgl. auch Teil I, S. 50, Anm. 2). Entscheidend ist aber, daß sich allmählich der Unterschied zwischen den artes liberales und den artes mechanicae überhaupt verwischt, daß also der in der ursprünglichen Verwandtschaft von τέχνη und ἐπιστήμη wurzelnde „Kunst"-Charakter aller Mathematik (vgl. Teil I, S. 74) mit der „Praxis" im Sinne des kunstgerechten Verfahrens selbst zusammengesehen wird.

[7]) Ausgaben: Bachet de Meziriac 1621; 2. Aufl. (mit Anmerkungen von Fermat) 1670. Tannery 1893—95. (Wir zitieren nach der letzteren.) — Einige Codices teilen übrigens den gleichen Stoff in 7 Bücher auf.

1. und 2. Grades geläufig sind. Hierbei gebraucht Diophant neben anderen Zeichen auch eine Reihe von Abkürzungen für die Unbekannte und ihre Potenzen, die in die Rechnung selbst eingehen und dieser damit einen „algebraischen“ Charakter verleihen. So kam es, daß Diophant — allerdings stets mit einigen Vorbehalten — als „Erfinder“ bzw. „Vater“ unserer heutigen Algebra angesprochen werden konnte[8]). Mit Nachdruck haben schon Nesselmann[9]) und später Tannery[10]) und Heath[11]) darauf hingewiesen, daß wir allen Anlaß haben, die Originalität Diophants anzuzweifeln, mag uns auch keine ähnliche Schrift aus dem Altertum bekannt sein. Das Material, das die Diophantischen Probleme verarbeiten, finden wir bereits bei Thymaridas (vgl. Teil I, S. 45), bei Plato (Gesetze 819 B, C), im Charmides-Scholion (vgl. Teil I, S. 25 f.), ferner in den „arithmetischen“ Epigrammen der Anthologia Palatina und bei Heron von Alexandrien[12]). Und wenn die Form, in der dieses Material bei Diophant dargeboten wird, sich vor ihm nicht nachweisen läßt, so kann man doch mit Recht geltend machen, daß zwischen ihm und seinen Vorläufern dasselbe Verhältnis bestehen mag wie zwischen Euklid und den Verfassern der früheren „Elemente“, Theudios, Leon und Hippokrates von Chios, deren Werke durch die Euklidische Sammlung völlig verdrängt worden sind[13]).

Von jeher hat man auch versucht, den „Alexandriner“ Diophant unmittelbar mit der ägyptischen Tradition in Verbindung zu bringen, ja die ganze Diophantische Technik als eine Fortbildung der ägypti-

[8]) Besonders von Hankel, Zur Gesch. d. Math. i. Alt. u. Mittelalt., 1874, S. 158, und von Hultsch, Pauly-Wissowa v. Diophantos §§ 6 u. 9 (S. 1055; 1059 f.). Bereits Montucla, Histoire des mathématiques, 1758, I 315, sagt sehr vorsichtig: „il n'est pas possible de déterminer si Diophante fut l'inventeur de l'Algebre“, aber „on peut se former d'après cet ouvrage une idée de ce qu' étoit l'Algebre au tems de Diophante“.

[9]) Die Algebra der Griechen, 1842, S. 284 ff.

[10]) z. B. Mém. scient. III 158; 357; La géom. grecque, S. 50—52; 2. Bd. der Diophant-Ausgabe, S. XXI.

[11]) Diophantus of Alexandria², 1910, S. 111 ff.

[12]) vgl. Heath, D. of Alex.², S. 118—121; A history of greek mathematics, 1921, II 444—447.

[13]) vgl. hierzu z. B. Nesselmann, a. a. O., S. 285, Anm. 51; Heath, D. of Al.², S. 124 (auch weiter unten S. 132, Anm. 20). — Die Worte im Prooemium (2, 8 f.): Ἴσως μὲν οὖν δοκεῖ τὸ πρᾶγμα δυσχερέστερον, ἐπειδὴ μήπω γνώριμόν ἐστιν . . . dürfen jedenfalls nicht so verstanden werden, als ob Diophant etwas bis dahin gänzlich Unbekanntes lehren wolle. Sie sind nur in Beziehung auf den Schüler gesagt (vgl. Nesselmann, a. a. O., S. 286 f.; Cantor I³ 469). Der Ausdruck „ἐδοκιμάσθη“ (4, 12), der in demselben Sinne auch in der Schrift über die Polygonalzahlen vorkommt (451, 11), „indique que notre auteur reproduit une tradition consacrée“ (Tannery, Mém. scient. II 68).

schen Aha-Rechnung aufzufassen[14]). Demgegenüber hat Neugebauer neuerdings Diophants Werk in weit umfassendere Zusammenhänge hineingestellt[15]). Er sieht in ihm den letzten griechischen Ausläufer vor allem auch der babylonischen „algebraischen“ Tradition, die von den Arabern später auf Grund direkter orientalischer, nicht allein durch die Griechen vermittelter Rezeption weitergeführt wird[16]). Daß die Wissenschaft Diophants in vieler Hinsicht nicht-griechische Züge aufweist, wird man wohl kaum bestreiten dürfen[17]). Aber — wie immer es sich mit jener weiteren Vorgeschichte verhalten mag: das auf hellenistischem Boden erwachsene Werk muß zunächst in seiner Begrifflichkeit aus griechischen Voraussetzungen verstanden werden. Neugebauer selbst hat im Hinblick auf die „latente algebraische Komponente in der klassischen griechischen Mathematik“ und den dadurch bedingten tiefgehenden Unterschied zwischen äußerem Aufbau und innerer Motivierung hier die „Notwendigkeit einer beinahe als stilgeschichtlich zu bezeichnenden Fragestellung“ betont[18]). Eine solche Fragestellung setzt nun freilich eine gewisse Unabhängigkeit des materialen mathematischen Gehalts von seiner „äußeren“ Form voraus, was letztlich darauf hinausläuft, daß der materiale Gehalt an sich unmittelbar „algebraisch“ verstanden wird. Unsere Aufgabe besteht aber doch gerade darin, den Gehalt der griechischen Mathematik nicht durch äußere Transponierung in eine andere Darstellungsweise sichtbar zu machen — was bereits eine ganz bestimmte Interpretation dieses Gehalts voraussetzt —, sondern ihn so erfassen zu lernen, wie er für die Griechen allein erfaßbar schien. Dann erst läßt sich die Frage beantworten, welcher Art die begrifflichen Mittel sind, deren sich die griechische Mathematik im Unterschied zur modernen bedient. Und erst durch die Herausarbeitung dieser besonderen griechischen Begrifflichkeit, deren eigentümliche Umformung im 16. und 17. Jahrh. mit der „Einführung einer ganz neuen Ausdrucksmöglichkeit mathe-

[14]) vgl. Cantor I³ 466, dazu 74 ff.; Heath, Dioph. of Alex.², 112 f.; A hist. of gr. math., II 440 f.; Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Diophant § 7 (S. 1056 ff.). (S. auch Teil I, S. 25, Anm. 4.)

[15]) „Die Naturwissenschaften“ 1933, Heft 30, S. 564 (Besprechung der 3. Aufl. des 2. Bandes von Tropfke, Gesch. d. Elementarmathematik).

[16]) Zum Terminus „Algebra“ bzw. „al-muqābala“ vgl. Neugebauer, Stud. z. Gesch. d. ant. Alg. I, Quellen und Studien B 2, 1 f., Anm. 1.

[17]) besonders deutlich z. B. an der „Definition IX“ (12, 19 f.), wo ohne weitere Erläuterung die Regeln für die Multiplikation des „Fehlens“ (λεῖψις) und des „Vorhandenseins“ (ὕπαρξις) — die den modernen Zeichen „minus“ und „plus“ entsprechen — angegeben werden, während Diophant den Begriff der „negativen Größe“ gar nicht kennt. (Vgl. übrigens auch, was die Bruchrechnung bei Diophant betrifft, Tannery, Mém. sc. II 155 f.).

[18]) Apollonius-Studien, Quellen und Studien B 2, 216 f.

matischen Denkens" [19]), nämlich einer formalen „algebraischen" Symbolik gleichbedeutend ist, läßt sich auch diese letztere in ihrem spezifischen Begriffscharakter verstehen.

Für die Beurteilung der Bedeutung Diophants innerhalb der Geschichte der griechischen Mathematik ist nun bis heute vor allem die Meinung Tannery's maßgebend geblieben, auf die wir deshalb kurz eingehen müssen. — Tannery erblickt die originale — oder doch nur auf wenige Vorgänger sich stützende — Leistung Diophants in der neuen Auffassung, die er von dem Gegenstande der Logistik gewonnen habe: dies drücke sich bereits in dem Titel „Ἀριθμητικά" seines Hauptwerkes aus, womit doch nur eine ἐπιστήμη, eine echte „Wissenschaft" bezeichnet werden konnte [20]). Diophant habe also die Logistik zum Range einer echten Wissenschaft erhoben. Daher führe er auch zu den Lösungen der Aufgaben die „Beweise", d. i. den jeweiligen Gang der Auflösung (die ἀπόδειξις), an, was die früheren Logistiker nicht getan hätten, weil eben die Logistik keine echte, apodeiktische Disziplin gewesen wäre. Vor allem seien die „Zahlen", mit denen er rechnet, mit einer einzigen Ausnahme (der 30. Aufgabe des 5. Buches) „abstrakt" und nicht „konkret", wie es die „Zahlen" der Logistiker vor ihm, wenn auch vielleicht nicht immer, so doch wohl meistens gewesen seien. Die Späteren hätten dann sein Werk mißverstanden, indem sie seine neue „abstrakte" Logistik im Sinne der alten „konkreten" interpretierten. So heißt es in einem anonymen Kommentar zu Nikomachos (abgedruckt im 2. Bde. der Tannery-Ausg. des Diophant, S. 73): τὸν γὰρ μετρούμενον ἀριθμὸν Διόφαντος ἐν τοῖς δέκα καὶ τρισὶν αὐτοῦ βιβλίοις τῆς ἀριθμητικῆς παραδίδωσιν („denn die gemessene Anzahl [d. h. die an Dingen abgezählte Anzahl] behandelt Diophant in den dreizehn Büchern seiner Arithmetik"), während Nikomachos von der messenden Anzahl, der Anzahl selbst, spreche [21]).

In einer späteren Veröffentlichung (1896) [22]) hat Tannery eine Erklärung für den „abstrakten" Charakter der Diophantischen Aufgaben zu geben versucht, die mit diesen Darlegungen allerdings nicht ohne weiteres in Einklang zu bringen ist und die übrigens auch auf durchaus umstrittenen Voraussetzungen beruht. Ausgehend von der Beziehung

---

[19]) Neugebauer, Stud. z. Gesch. d. ant. Alg. I, Quellen und Studien B 2, 2.

[20]) vgl. auch die Ausdrücke: προβλήματα ἀριθμητικά (4, 10), ἡ ἀριθμητικὴ θεωρία (4, 13 f.). In der Überlieferung wird das Diophantische Werk auch ἀριθμητικὴ στοιχείωσις und sogar einfach Στοιχεῖα genannt (2. Bd. der Tannery-Ausg., S. 72, 18 f.; 62, 24 f.; vgl. auch das Zitat weiter unten im Text).

[21]) La géometrie grecque, 1887, S. 50—52. Für die späteren auf Diophant bezüglichen Veröffentlichungen Tannerys bildet das hier Gesagte die allgemeine Grundlage. (Vgl. dazu auch Nesselmann, a. a. O., S. 44).

[22]) Mém. scient. II 535—537

Diophants zu Anatolius, dem Bischof von Laodicäa, wie sie aus dem von Tannery ans Licht gezogenen Fragment des Psellus (abgedruckt im 2. Bd. der Tannery-Ausgabe des Diophant, S. 37 ff.) zu entnehmen sein soll, meinte er den Dionysios, dem die Diophantische „Arithmetik“ gewidmet ist, mit dem heiligen Dionysios, dem Bischof von Alexandrien, identifizieren zu können und weiterhin daraus folgern zu dürfen, daß das Diophantische Lehrbuch zum Gebrauch in der alexandrinischen Katechetenschule bestimmt gewesen sei. So glaubte er auch Diophant als Christen ansprechen zu müssen [23]). Und diese Hypothese schien

[23]) Die betreffende Stelle bei Psellus lautet: Περὶ δὲ τῆς αἰγυπτιακῆς μεθόδου ταύτης Διόφαντος μὲν διέλαβεν ἀκριβέστερον, ὁ δὲ λογιώτατος Ἀνατόλιος τὰ συνεκτικώτατα μέρη τῆς κατ' ἐκεῖνον ἐπιστήμης ἀπολεξάμενος ἑτέρως (im MS. ἑτέρω; Tannery liest ἑταίρῳ bzw. τῷ ἑταίρῳ) Διοφάντῳ συνοπτικώτατα (nach der anderen Lesart: συνεκτικώτατα wie oben, was Tannery Veranlassung gibt, das Wort zu streichen) προσεφώνησε. (Vgl. 2. Bd. der Tannery-Ausgabe, S. XLVII.) Der Schluß dieses Satzes ist offensichtlich verderbt. Daß ἑταίρῳ kaum in Frage kommt, ergibt sich — worauf Hultsch (Pauly-Wissowa, v. Diophantos, S. 1052 f.) hingewiesen hat — bereits aus der Wortfolge: es müßte dann heißen Δ. τῷ ἑταίρῳ. Hultsch liest also ἑτέρως, nämlich ἀπολεξάμενος ἑτέρως. Heath (Dioph. of Alex.², S. 2) liest ebenfalls ἑτέρως und übersetzt: „Diophantus dealt with it more accurately, but the very learned Anatolius collected the most essential parts of the doctrine as stated by Diophantus in a different way and in the most succinct form, dedicating his work to Diophantus“ — was den Sinn nicht hinreichend klärt. — Ist demnach die Behauptung, Diophant sei ein „Freund“ des Anatolius gewesen, dem Text keineswegs zu entnehmen, so scheint andererseits auch der ganze Zusammenhang, in den diese Stelle hineingehört, durchaus nicht etwa darauf hinauszulaufen, daß Anatolius sein Werk dem Diophant „gewidmet“ habe, in welchem Sinne das Wort προσεφώνησε — allerdings im Einklang mit dem Sprachgebrauch — verstanden zu werden pflegt. Tannery selbst führt die vorher von Psellus angegebene und von der Diophantischen abweichende Nomenklatur der Potenzen der Unbekannten auf Anatolius zurück (vgl. Mém. scient. II 430 f.; IV 276 ff.). Offenbar bezieht sich unsere Stelle eben auf die Verschiedenheit der Benennungen bei Anatolius und bei Diophant. Man vergleiche den Ausdruck προσεφώνησε mit den Ausführungen im Prooemium des Diophant 4, 12 ff. und 6, 22—25. Προσφωνεῖν müßte demnach verstanden werden im Sinne von „etwas als etwas anreden, nennen“. Dann wäre zu lesen: ἑτέρως Διοφάντου.

Ganz abgesehen von der Fraglichkeit der Identifizierung des von Diophant (1, 4) genannten Dionysios mit dem Bischof von Alexandrien scheint uns also aus den Worten des Psellus mit Sicherheit nur hervorzugehen, daß Diophant nicht nach Anatolius zu setzen ist, wodurch jedenfalls der für die Datierung Diophants in Frage kommende Zeitraum nahezu um ein Jahrhundert verringert wird, keineswegs aber, daß er ein (älterer) Zeitgenosse des Anatolius gewesen sei. — Für die genauere Datierung müßten vielleicht mehr als bisher Hippolytos und Heron herangezogen werden. Was Hippolytos betrifft, so stellt der fragliche Abschnitt in den Philosophumena (Diels, Doxographi graeci, 556 f.) wahrscheinlich eine Verschmelzung der pythagoreischen Tetraktys-Lehre mit einer der Diophantischen völlig entsprechenden — und vom Autor gänzlich mißverstandenen — „algebraischen“ Nomenklatur dar. Vgl. bei Hippolytos 557, 3 f. die Reihe ἀριθμὸς μονὰς δύναμις κύβος δυναμοδύναμις δυναμόκυβος κυβόκυβος und Diophant 4, 14—6, 8, wobei Hippolytos (vgl. auch 556, 23 f.) die bei Diophant zuletzt erwähnten Termini ἀριθμός und μονάς an den Anfang der Reihe stellt. (Vgl. ferner Hippolytos

10*

sich ihm nun gerade durch die besondere Gestalt der Diophantischen Arithmetik zu bestätigen. Denn für den Unterricht in einer christ-

---

556, 8 f.: Ἀριθμὸς γέγονε πρῶτος ἀρχή, ὅπερ ἐστὶν ἀόριστον ἀκατάληπτον, ἔχων ἐν ἑαυτῷ πάντας τοὺς ἐπ' ἄπειρον δυναμένους ἐλθεῖν ἀριθμοὺς κατὰ τὸ πλῆθος und Diophant 2, 14—16 und 6, 3—5.) — Andererseits besteht eine auffällige „Stil"-Ähnlichkeit zwischen der „Metrik" Herons und der „Arithmetik" Diophants: 1. die Rechnung mit „reinen" Monaden (vgl. Teil I, S. 105), 2. die weitgehende Loslösung dieser Rechnung von geometrischen Vorstellungen (vgl. S. 141, Anm. 42), 3. die Entsprechung der σύνθεσις bei Heron und der nachträglichen ἀπόδειξις bei Diophant (vgl. S. 138, Anm. 34), 4. die Art der Bezeichnung von Brüchen; ferner kommt bei Heron der Ausdruck δυναμοδύναμις (Schöne 48, 11 ff.) und sogar das Diophantische Subtraktionszeichen (156, 8 und 10) vor — vgl. zu alledem Tannery, Mém. scient. III 147 f. und 208 ff. — Wenn man nun mit Ingeborg Hammer-Jensen (Hermes 48, 1913, S. 224—235) Heron nach Ptolemaios, aber nicht ans Ende des 3. Jahrh., wie sie und Heath (A hist. of gr. math. II, 306) es tun, sondern mit A. Stein (Hermes 49, 1914, S. 154—156) und Heiberg (Heron, Opera V, S. IX; Gesch. d. Math. u. Naturw. im Altert., 1925, S. 37, Anm. 4) ans Ende des 2. nachchristlichen Jahrhunderts setzt und andererseits die oben zitierten Stellen in den — um 230, und zwar in Rom, entstandenen — Philosophumena des Hippolytos (vgl. Bardenhewer, Gesch. d. altkirchl. Lit. II², 1914, S. 554, 555, 602) auf eine direkte Benutzung der Diophantischen „Arithmetik" zurückführt, so liegt es nahe, Diophant als Zeitgenossen Heron's anzusehen. Das Ende des 2. Jahrh. zeichnet sich gerade durch eine besondere Blüte der mathematischen und mechanischen Wissenschaften in Alexandrien aus, was unter Alexander Severus (222—235) dann zur Berufung einer Reihe von Gelehrten nach Rom führt (vgl. I. Hammer-Jensen, a. a. O., S. 233). Auch hat Heron eine Einleitung zu einer στοιχείωσις ἀριθμητική verfaßt (vgl. S. 132, Anm. 20), die er — wie später das entsprechende „geometrische" Werk (die sog. „Definitionen") — ebenfalls einem Dionysios widmete (vgl. Opera IV, 14, 1 ff.; 76, 23; 84, 18). [Das ἐγχειρίδιον des Domninos gehört übrigens zu demselben Typus: vgl. Domninos, a. a. O., 428, 16 f., wo er auf eine noch abzufassende ἀριθμητικὴ στοιχείωσις verweist.] So wäre es in der Tat möglich, daß der Dionysios des Diophant und der Dionysios des Heron ein und dieselbe Person darstellen, wie Heath (a. a. O., 306, Anm. 1) vermutet (vgl. auch Tannery, Mém. scient. II 538; La géom. gr. 180, Anm. 2). Fraglich bliebe natürlich, ob es sich dabei, wie Stein meint, um M. Aurelius Papirius Dionysios handelt, der 187/88 Statthalter (ἡγεμών) von Ägypten war. Es ließe sich hier noch auf die Anrede in einer Urkunde aus dem 2. oder frühen 3. Jahrh.: Διονυσίῳ τῷ τιμιωτάτῳ χαίρειν hinweisen (Grenfell and Hunt, The Oxyrhynchos-Papyri X, 1295, 1 f.). Schwierigkeiten bietet vor allem die Titelfrage: bei Diophant wird Dionysios als τιμιώτατος, bei Heron als λαμπρότατος angesprochen.

(In diesem Zusammenhang wäre noch anzumerken:

Daß Heiberg einerseits Heron ans Ende des 2. Jahrh. setzt und andererseits die Meinung von I. Hammer-Jensen unterstützt, wonach der von Heron angeredete Dionysios mit L. Aelius Helvius Dionysius, praeceptus urbi im Jahre 301, identisch sei (Heron, Opera V, S. XI, Anm. 1, und Gesch. d. Math. u. Naturw. im Alt., S. 38, Anm. 4), beruht wohl nur auf einem Versehen.

Tannery betrachtet Hippolytos als einen Autor des 2. Jahrhunderts (vgl. Mém. scient. II 68; 90; I 186, Anm.) und läßt ihn eben deshalb für die Datierung Diophants außer Betracht. Die erwähnte Stelle bei Hippolytos gilt ihm nur als ein Zeugnis dafür, daß die „algebraische" Nomenklatur bereits vor Diophant in Gebrauch war.)

Nun steht aber — trotz der Beweisführung von I. Hammer-Jensen — die Zeit

lichen Schule kamen offenbar nicht die üblichen heidnisch-mythologischen Einkleidungen in Frage, wie wir sie von den Aufgaben der Anthologia Palatina und dem archimedischen Rinder-Problem her kennen. Der Verzicht auf solche Einkleidungen brachte aber unmittelbar die durchgehende „Abstraktheit" der Diophantischen Aufgaben hervor. (Auch wäre zu sagen, daß die Einkleidung der 30. Aufgabe des 5. Buches jedenfalls nicht von mythologischer Art ist, ganz abgesehen davon, daß diese am Schluß eines Buches stehende Aufgabe vielleicht einen späteren Zusatz darstellt.)

Diese Erklärung läßt also doch im Grunde — in Übereinstimmung mit jenem anonymen Kommentar — die Diophantische „Arithmetik" als eine „Logistik" im neuplatonischen Sinne erscheinen, die nur in sehr äußerlicher Weise ihr „konkretes" Gewand abgestreift hat. Von hier aus wäre der „wissenschaftliche", „theoretische" Charakter des Werkes nicht recht zu verstehen. Offensichtlich reicht der Gegensatz „abstrakt"-„konkret" gar nicht hin, um ein Werk dieser Art charakterisieren zu können. Es ist für Diophant freilich kennzeichnend, daß er mit ἀριθμοί rechnet, die nichts anderes sind als Anzahlen von reinen Monaden. Solche Anzahlen sind aber keineswegs ohne weiteres „abstrakt" zu nennen (siehe Teil I, S. 55). Worauf es ankommt, ist vielmehr, zu wissen, wie das Sein dieser Monaden verstanden wird, ob als eigenständiges und damit jede Teilung ausschließendes oder als durch Reduktion auf „neutrale" Stücke gewonnenes Sein, das lediglich den „Maß"-Charakter anzeigt und somit eine weitere Teilung der Stücke selbst durchaus zuläßt. Welches von beiden hier gilt, kann nicht zweifelhaft sein.

---

Heron's keineswegs eindeutig fest. Und es ist nicht recht einzusehen, warum die Epigramme des Lukillos (oder Lucillius) und des Nikarchos, die sich auf einen „Astronomen" Diophant (und einen Arzt Hermogenes) beziehen, nicht den „Arithmetiker" Diophant meinen können. Seit der deutschen Übersetzung Diophants durch Otto Schulz, 1822, ist es allgemein üblich, die Identität des „Astronomen" und des „Arithmetikers" zu leugnen, 1. weil ein „Astronom" eben nicht ein „Arithmetiker" sei; 2. weil der Inhalt dieser Epigramme, die die winzige Gestalt Diophants verspotten, sich mit der Würde und dem „hohen Genie des Arithmetikers" nicht vereinbaren lasse (vgl. Nesselmann, a. a. O., S. 497 f.); 3. weil in diesen Epigrammen von einem überraschenden und gewaltsamen Tode Diophants die Rede ist, während er nach dem bekannten Epigramm (2. Bd. der Diophant-Ausgabe von Tannery, S. 60 f.) 84 Jahre alt geworden und „also vermutlich doch eines natürlichen Todes gestorben" sei (vgl. Schulz, Vorrede, S. XII — s. auch S. IX ff.). Man wird zugeben, daß diese Argumentation von bemerkenswerter Naivität ist. Es wäre wohl richtiger, zu der bereits von Bachet in der Vorrede seiner Diophant-Ausgabe geäußerten Ansicht zurückzukehren, wonach diese Zeugnisse, die aus der Zeit Nero's stammen (vgl. Handb. d. klass. Alt.-wiss. VII, 2, 1: Christ-Schmid, Gesch. d. gr. Litt., 1920, S. 329 f.; 416), Diophant ins 1. nachchristliche Jahrhundert zu setzen erlauben. Vielleicht ließe sich hieraus umgekehrt etwas für die Datierung Heron's gewinnen.

Zunächst: daß es sich tatsächlich um Anzahlen von reinen Monaden handelt, ergibt sich nicht nur unmittelbar aus der — an Euklid VII, Def. 2 (vgl. Teil I, S. 57) anklingenden — „Definition I“ (2, 14 f.), wonach jede Anzahl aus einer bestimmten Menge von Monaden besteht (. . . πάντας τοὺς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐκ μονάδων πλήθους τινός . . .), sondern auch aus der Art, wie Diophant die innerhalb der Rechnung als „bekannt“ vorausgesetzten Anzahlen (οἱ ὡρισμένοι — 6, 6 f.) bezeichnet. Dem Buchstabenzeichen, das die Anzahl der Monaden angibt, wird nämlich zumeist das Zeichen für μονάς ($\overset{\circ}{M}$) — gemäß der „Definition II“ (6, 6—8) — vorangestellt, also $\overset{\circ}{M}\overline{\delta}$ (vier Einsen), $\overset{\circ}{M}\,{,}\overline{\varsigma\upsilon}$ (sechstausend vierhundert Einsen) usf. Nesselmann[24]) und — ihm folgend — Tannery[25]) und Heath[26]) haben diese Schreibweise folgendermaßen zu erläutern gesucht: da Diophant die Glieder einer Gleichung, die wir heute durch ein „Plus“-Zeichen miteinander verbinden, einfach nebeneinander stellt, ohne sie durch ein besonderes Verbindungszeichen voneinander zu trennen, so würde sehr oft beim Wegfall des Zeichens $\overset{\circ}{M}$ eine Vermengung des Koeffizienten der Unbekannten mit dem folgenden, eine „bekannte Zahl“ darstellenden Glied eintreten, also z. B. $\varsigma\overline{\kappa}\overset{\circ}{M}\overline{\varepsilon}$ (zwanzig Unbekannte + fünf Monaden) ohne das Zeichen $\overset{\circ}{M}$ so aussehen: $\varsigma\overline{\kappa}\,\overline{\varepsilon}$ und folglich leicht mit $\varsigma\overline{\kappa\varepsilon}$ (fünfundzwanzig Unbekannte) verwechselbar sein. Dagegen läßt sich einwenden, daß in unzähligen Fällen eine solche Vermengung gar nicht möglich *ist* und es im übrigen ein leichtes gewesen wäre, sie durch ein besonderes, zwischen beide Glieder zu setzendes Wort bzw. Wortzeichen (etwa „und“) unmöglich zu machen. (Auch unser Zeichen + scheint ja nur eine ganz vereinfachte Ligatur für das Wort „et“ zu sein[27]).) Man muß wohl umgekehrt annehmen, daß die Einführung eines solchen Verbindungszeichens eben darum unnötig schien, weil das Zeichen $\overset{\circ}{M}$ jede Vermengung tatsächlich schon ausschloß. Die Benutzung dieses Zeichens selbst aber ergab sich unmittelbar *aus der Art, wie jeder ἀριθμός in der durchschnittlichen Rede angesprochen wurde, nämlich als eine bestimmte Anzahl bestimmter Dinge* — im extremen Fall eben als eine Anzahl von Maßeinheiten bzw. von „reinen“ oder „neutralen“ Monaden (vgl. Teil I, S. 53 ff.)[27a]). Diesem

[24]) a. a. O., 296.

[25]) Mém. scient. III 160.

[26]) Dioph. of Alex.², 39.

[27]) vgl. Tropfke, Gesch. d. Elem.-Math. II³, 22 f. — Es tritt zum ersten Mal in der 2. Hälfte des 15. Jahrh. auf (ebda, S. 15 ff.).

[27a]) Entsprechend dem Sprachgebrauch *folgt* daher auch zuweilen das Zeichen $\overset{\circ}{M}$ dem Anzahlen-Zeichen, z. B. 238, 11: αἱ δὲ $\overline{\vartheta}$ $\overset{\circ}{M}$ . . . oder 334, 12 f.: ζητῶ ἄρα μόριον τετραγωνικὸν προσθεῖναι ταῖς $\overline{\kappa\varsigma}$ $\overset{\circ}{M}$ . . . usf. Das Zeichen $\overset{\circ}{M}$ ist eben bei Diophant — wie *alle* von ihm benutzten Zeichen — nichts als eine Wortabbreviatur (s. weiter unten S. 150). Und es bleibt immer noch im Rahmen des üblichen Sprachgebrauchs, wenn

Sprachgebrauch begegnen wir durchweg auch in der „Metrik“ Herons (vgl. Teil I, S. 105), ohne daß er sich hier — soweit man dies nach dem überlieferten Manuskript (aus dem 11. oder 12. Jahrh. [28])) beurteilen kann — zu einer eindeutig fixierten Zeichensprache verdichtet hätte. Das gleiche gilt auch von dem uns fragmentarisch überlieferten 2. Buch des Pappus (Hultsch I, S. 2—28), wo das Rechen- und Benennungssystem des Apollonius dargestellt ist (vgl. Teil I, S. 41, Anm. 3). Dem Benennungssystem des Apollonius und ebenso demjenigen des Archimedes, wie er es in der — uns nicht erhaltenen — Schrift an Zeuxippos [29]) und im Ψαμμίτης dargestellt hat, liegt übrigens eben derselbe Sprachgebrauch zu Grunde: sie beruhen beide auf der Einführung von Einheiten höherer Ordnung, deren Zählung Anzahlen höherer Ordnung ergibt, die bei Archimedes ($II^1$, 270, 2 f. u. 21 f.; 272, 4 bzw. $II^2$, 240, 2 u. 20 f. u. 29, usw.) ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, bei Apollonius einfach ἀνάλογοι (ἀριθμοί) bzw. τὰ ἀνάλογα (Pappus, Hultsch I, S. 20, 13 u. 20; 28, 13 u. 21; 26, 4 — vgl. Hultsch III, S. 1213) heißen; diese gestatten dann, ungewöhnlich große Anzahlen einfacher Monaden ohne besondere Schwierigkeit auszusprechen, aufzuschreiben und Berechnungen zu unterwerfen [30]). Auch in dem sonst üblichen Zählsystem bildet ja die μυριάς eine neue, höhere Einheit, ja im Grunde schon die χιλιάς, wenn man die Zahlwörter χίλιοι, δισχίλιοι, τρισχίλιοι usf. und die ihnen entsprechende Schreibweise in Betracht zieht [31]). Die Systeme des Archimedes und vor allem des Apollonius stellen nur die konsequente Weiterführung eines durch die griechische Denk- und Sprechweise vorgegebenen Ansatzes dar.

Ordnet sich in dieser Hinsicht die Diophantische „Arithmetik“ offensichtlich der allgemein üblichen griechischen Anzahlenauffassung und Anzahlenbehandlung unter, so ist es andererseits klar, daß ihr eine ontologische Auffassung der Monaden zu Grunde liegt, die mit der neuplatonischen durchaus nicht in Einklang zu bringen ist. Bei Diophant erscheint das Rechnen mit Bruchteilen der Recheneinheit, d. h. also das Aufteilen der Recheneinheit, als ohne weiteres angängig

das M̊-Zeichen gelegentlich ganz wegfällt, z. B. 244, 14: Ἔστω ὁ δοθεὶς [sc. ἀριθμός] ὁ δ̄ oder 252, 22 f.: ἀλλὰ ὁ κη̄ ἥμισύ ἐστι τῶν νς̄ [sc. μονάδων], ὥστε τὰ ιδ̄, δ^οι ἐστι τοῦ νς̄.

[28]) Schöne S. VII.

[29]) Opera $II^1$ 242, 17—19; 246, 11; 266, 11—14 = $II^2$ 216, 17—19; 220, 3 f.; 236, 19—22. Es ist nicht ganz sicher, ob diese Schrift den Titel Ἀρχαί geführt hat — vgl. dazu Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Archimedes, S. 511 f. Jedenfalls ist deren Inhalt im 3. Kap. des Ψαμμίτης ($II^1$ 266 ff. = $II^2$ 236 ff.) angegeben.

[30]) Bei Pappus-Apollonius (Hultsch I, 28, 9) wird auf diese Weise z. B. die Anzahl die wir heute mit 780. 3371. 5200. 0000 wiedergeben, so geschrieben: μ^γ ψπ' καὶ μ^β,γτοα' καὶ μ^α,εσ' (d. h. siebenhundertachtzig dreifache Myriaden und dreitausend dreihunderteinundsiebzig zweifache Myriaden und fünftausend zweihundert einfache Myriaden).

[31]) vgl. Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Arithmetica, S. 1069.

(besonders deutlich z. B. in den Formulierungen der 31. Aufgabe des 4. Buches und der Aufgaben 9, 10, 11, 12 des 5. Buches[32])), wie auch — laut „Definition III" (6, 9—21) — die Unbekannte und ihre Potenzen als „Nenner" solcher Bruchteile auftreten können, die ihren Namen dann „abgeleiteterweise" (παρομοίως[33])) von eben jenen „unbekannten" Größen her erhalten, z. B. τὸ κυβοστόν (von κύβος), τὸ δυναμοδυναμοστόν (von δυναμοδύναμις) usf. Und zwar schmälert offenbar dieses Umgehen mit Bruchteilen der Recheneinheit in keiner Weise den „theoretischen" Charakter des ganzen Werkes, was doch im Lichte der neuplatonischen Auffassung tatsächlich der Fall sein müßte (vgl. Teil I, S. 50 u. 51 f.). Dieser „theoretische", apodeiktische Charakter zeigt sich eben unzweideutig darin, daß die Aufgaben im Hinblick auf „reine" Monaden — mit Ausnahme der Aufgaben des 6. Buches und der 30. Aufgabe des 5. Buches — gestellt und auch an ihnen — ausnahmslos — gelöst werden. Dabei ist der Gang der Auflösung, die ἀπόδειξις (vgl. 256, 12; 430, 17; 208, 13 usw.)[34]) in jedem Fall streng „methodisch", d. h. auf alle anderen Fälle des gleichen Typus übertragbar, wenn auch diese Übertragung in Anbetracht der Rechnung mit jeweils bestimmten Anzahlen von Monaden nicht immer ohne Schwierigkeit zu bewerkstelligen ist. In gewissen Fällen können aber in der Tat unbegrenzt oft (ἀπειραχῶς) immer neue Lösungen auf Grund der einmal durchgeführten ἀπόδειξις gefunden werden (vgl. insbesondere 184, 4 f. u. 200, 21). Allgemeinen Charakter haben ferner die Regeln für die Behandlung der Gleichung 1. Grades bzw. der rein quadratischen, rein kubischen usf. („Def. XI", 14, 11—20), ebenso die von Diophant ständig angewandte „Methode der Zurückrechnung", nach dem Ausdruck Nesselmanns (a. a. O., S. 370), die man durchweg auch Methode des „falschen Ansatzes" zu nennen pflegt, und endlich die Regel zur Auflösung der sog. „Doppelgleichung" (vgl. 96, 9 ff.[35])). Die „Arithmetik" Diophants ist also tatsächlich ein theoretisches Werk (vgl. auch den Aus-

[32]) Diese Aufgaben beginnen mit den Worten: Τὴν μονάδα διελεῖν (bzw. τεμεῖν) εἰς δύο μόρια (bzw. ἀριθμούς) . . . oder Μονάδα διελεῖν εἰς τρεῖς ἀριθμούς . . .

[33]) παρομοίως hat hier zweifellos den Sinn von παρωνύμως, weshalb Xylander, der erste Übersetzer Diophants, und auch Bachet es durch dieses ersetzen. (Bachet schreibt allerdings παρονύμως, was aber wohl nur ein Versehen ist, da er ausdrücklich erklärt, der Konjektur Xylanders zu folgen, wonach es eben παρωνύμως heißen müßte.)

[34]) Diophant kennt noch eine andere Art von ἀπόδειξις, nämlich die nachträgliche „Probe", worüber noch ausführlich zu sprechen sein wird (s. weiter unten S. 160 f. u. 167).

[35]) dazu Nesselmann, a. a. O., S. 309, 335 ff. u. 352 ff.; Heath, D. of Al., S. 73 ff. — Die Allgemeinheit dieser Regeln würde für sich allein allerdings noch nicht den „theoretischen" Charakter des Werkes gewährleisten (vgl. S. 126 ff.). Diese Regeln sind aber auf alle Fälle als „Kunst"-Regeln zu verstehen, was für die moderne Fort- und Umbildung der Diophantischen „Arithmetik" von größter Wichtigkeit geworden ist (vgl. weiter unten S. 175). Hierher gehört auch ein von Diophant gelegentlich angewandtes Approximations-Verfahren (παρισότητος ἀγωγή) — vgl. Heath, a. a. O., S. 95 ff.; 207 ff.

druck ἀριθμητικὴ θεωρία — 4, 14), das nicht davor zurückschreckt, Bruchteile der Recheneinheit in die Betrachtung einzuführen. Grundsätzlich möglich ist dies nur, wenn die μονάς ontologisch auf peripatetische Weise verstanden wird (s. Teil I, S. 98 ff.)[36]. Das bedeutet, daß wir es bei Diophant — wie bei Heron (vgl. Teil I, S. 105) — mit ἐξ ἀφαιρέσεως gewonnenen „neutralen" Monaden zu tun haben, wodurch übrigens auch die 30. Aufgabe des 5. Buches ihre Sonderstellung verliert. Wenn wir uns aber andererseits den wesentlichen Gehalt des Diophantischen Werkes vergegenwärtigen, wie er uns in den Formulierungen der Aufgaben selbst entgegentritt, so läßt sich der Gedanke kaum abweisen, daß es sich hier um eine Disziplin handelt, auf die die platonische Definition der Logistik (s. Teil I, S. 29) ohne weiteres anwendbar erscheint.

Wir dürfen uns in der Tat bei der Beurteilung des Werkes nicht von modernen algebraischen Begriffen leiten lassen. Von ihnen aus gesehen, scheint es Diophant eigentümlich zu sein — entsprechend der von ihm repräsentierten primitiven Stufe der Algebra —, Aufgaben zu stellen, die zumeist der unbestimmten Analytik angehören (worauf, vor allem durch die Vermittlung von Fermat, der heutige Begriff der sog. „Diophantischen Gleichungen" zurückgeht), diese aber immer durch willkürliche numerische Annahmen in bestimmte Gleichungen zu verwandeln, die eine eindeutige (und dann auch keineswegs bloß ganzzahlige) Lösung gestatten. Darüber hinaus muß von der modernen Lösungsweise aus der entscheidende Mangel der Diophantischen Technik darin gesehen werden, daß sie es nicht auf allgemeine Lösungen abgesehen hat. Nun kennt zwar auch Diophant Aufgaben und Lösungen „allgemeiner" Art (ἐν τῷ ἀορίστῳ bzw. ἐν τῇ ἀορίστῳ [sc. λύσει]), nämlich solche, die ihren Gegenstand „unbestimmt" lassen: „denn [eine Aufgabe] unbestimmt [zu lösen] suchen heißt einen [der Aufgabe] zu Grunde zu legenden Ausdruck von solcher Beschaffenheit suchen, daß, wieviel man auch immer unter der unbekannten Anzahl verstehen will, man nach Übernahme [dieser Anzahl] in die vorausgesetzten Ausdrücke der [in ihnen niedergelegten] Vorschrift der Aufgabe gerecht wird" (τὸ γὰρ ἀορίστως ζητεῖν ἐστιν ἵνα ἡ ὑπόστασις τοιαύτη ᾖ, ἵνα ὅσου τις θέλει τὸν ς

[36] Mit dieser Feststellung ist nicht gemeint, daß Diophant ein Anhänger der peripatetischen Philosophie gewesen sein oder sich überhaupt mit philosophischen Fragen beschäftigt haben muß. Auch hat der „theoretische" Charakter seines Werkes gar nichts mit der Frage zu tun, ob er selbst „Wissenschaftler" oder „Banause" gewesen ist, was übrigens ebenso für die Beurteilung Herons gilt. Welches immer die Stellung Diophants und der Grad seiner „wissenschaftlichen" Bewußtheit gewesen sein mag, — es kommt für unseren Zusammenhang nur darauf an, die grundsätzliche Möglichkeit der Diophantischen Darstellungsweise zu begreifen. Diese Darstellungsweise dürfte freilich letzten Endes in einer schon bestehenden „wissenschaftlichen" Tradition ihren faktischen Ursprung oder Hintergrund haben (vgl. auch weiter unten S. 141 f.).

εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας, σώσῃ τὸ ἐπίταγμα — 232, 6—8). Und entsprechend: „unbestimmt [lösen] heißt in der Weise lösen, daß, wieviel Monaden immer man unter der unbekannten Anzahl verstehen will, man durch die Übernahme dieser [unbestimmten] Anzahl in die vorausgesetzten Ausdrücke die Aufgabe [bereits] zu ihrem Ende gebracht hat“ (τὸ δὴ ἐν τῇ ἀορίστῳ [sc. λύσει λύειν] τοιοῦτόν ἐστιν, ἵνα τὸν ς, ὅσων ἄν τις θέλῃ M̊ εἶναι, ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις ποιήσας, περάνῃ τὸ πρόβλημα — 278, 10—12). Es zeigt sich aber, *daß solche Aufgaben und Lösungen immer nur einen vorläufigen oder Hilfscharakter haben.* Das gilt nicht nur für die ausdrücklich als solche gekennzeichneten Hilfsaufgaben (nämlich die Lemmata zu IV, 34, 35, 36 und das 1. Lemma zu V, 7), wo das Aufsuchen von, bestimmten Bedingungen unterliegenden, ἀριθμοὶ ἀόριστοι verlangt wird, sondern ebensosehr für die Aufgabe IV, 19, welche die folgende vorbereitet, und darüber hinaus auch für alle Aufgaben, innerhalb deren die „unbestimmte“ Lösung nur eine Vorstufe der endgültigen darstellt, was insbesondere bei den Aufgaben IV, 16, 17, 21, V, 18 und einer Reihe von Aufgaben des 6. Buches der Fall ist[37]). Von den begrifflichen Voraussetzungen der griechischen Anzahlenkunde aus gesehen, handelt es sich für Diophant immer nur darum, *ganz bestimmte Anzahlen* (und unter Umständen auch ganz bestimmte Bruchteile der Recheneinheit) *zu finden, die in einem* durch die jeweilige Aufgabe *vorgegebenen Verhältnis zueinander stehen.* So stellt das Diophantische Werk in der Tat eine *theoretische Logistik,* nämlich eine auf peripatetischer Grundlage aufgebaute Verhältnis-Lehre dar. Sie gliedert sich *von sich aus* nicht nach den Gleichungsarten und Lösungsmethoden, unter welchen Gesichtspunkten sie von den modernen Interpretatoren betrachtet zu werden pflegt[38]), sondern eben nach den möglichen Verhältnissen, in denen Anzahlen, insbesondere quadratische (τετράγωνοι) und kubische (κύβοι) samt ihren „Wurzeln“ (πλευραί) — vgl. 2, 17—22 —, zueinander stehen können (vgl. auch 16, 2—4).

Von hier aus gesehen, steht die „Arithmetik“ Diophants den „arithmetischen“ Büchern Euklids (VII, VIII, IX) keineswegs fern. Nicht nur, daß in der Aufgabe V, 10 (und übrigens auch in der Schrift über die Polygonalzahlen) die Euklidische Liniendarstellung übernommen wird, nicht nur, daß alle Aufgaben des 6. Buches die Auffindung rechtwinkliger Dreiecke mit „rationalen“ Seiten (bzw. auch „rationaler“ Winkelhalbierender — vgl. VI, 16) im Auge haben, so daß hier — wie bei Heron — die Monaden als unmittelbar von geometrischen Maß-

---

[37]) vgl. Nesselmann, a. a. O., S. 413 f.; 419 ff.; Tannery, Mém. scient. II 371.

[38]) vgl. Nesselmann, a. a. O., S. 314 ff.; Hankel, a. a. O., S. 164 f.; Tannery, Mém. scient. II 367 ff.; Heath, D. of Al., S. 54 ff.

einheiten „abstrahierte“ Recheneinheiten erscheinen[39]), — das ganze Werk Diophants verhält sich zu jenen Euklidischen Büchern wie eine weit ausgebaute und in die Einzelheiten gehende Wissenschaft zu ihrer „elementaren“ Grundlegung. Wie jene stellt es sich darum auch als arithmetisches Werk dar (vgl. Teil I, S. 51). Darüber hinaus bildet überhaupt Euklid den Hintergrund der Diophantischen Wissenschaft. Mögen die Πορίσματα, auf die Diophant verweist (316, 6 ff., 320, 5 ff. und 358, 4 ff.), in die „Arithmetik“ selbst eingebaut oder ein selbständiges Werk gewesen sein[40]), man kann nicht umhin, hier an das gleichnamige Werk Euklids zu denken[41]), wie denn auch die Begriffe der πρότασις, des ἀπάγειν, des λῆμμα bei Diophant der Euklidischen Terminologie entsprechen. [Das gilt auch vom Begriff des προσδιορισμός (36, 6; 340, 9 f.), der einschränkenden Bedingung, — bei Euklid (und ebenso bei Archimedes und Apollonius): διορισμός — vgl. Proklus in Eucl. 66, 20 ff., wo der Begriff auf Leon zurückgeführt wird, und 202, 3 f., ferner Pappus, Hultsch II, 636, 15 f.] Auch der Diophantische Begriff der ἀριθμοὶ ἀόριστοι wird erst ganz durchsichtig, wenn man ihn mit dem entsprechenden geometrischen, von Diophant im 6. Buch verwandten Begriff des τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει (396, 11 f. usf. — dazu Euklid, Data, Def. 3) zusammenbringt, d. h. eines nur der Gestalt nach, also nur hinsichtlich seiner Winkel und der Verhältnisse seiner Seiten, gegebenen rechtwinkligen Dreiecks. (Es kommt bei den betreffenden Aufgaben des 6. Buches allein darauf an, diese Verhältnisse jeweils richtig zu bestimmen, wodurch dann, unter Berücksichtigung der weiteren, in der Aufgabe vorausgesetzten Bedingung, sich sofort die eindeutige Lösung ergibt.) Wenn es auch gerade für Diophant kennzeichnend ist, daß er sich weitgehend von der geometrischen Darstellungsweise emanzipiert und auch die geometrischen Begriffe selbst „arithmetisch“ versteht[42]), so darf doch eben andererseits seine Verbindung mit der strengen mathematischen Tradition nicht verkannt werden, die sich an den Namen Euklids knüpft und die — wie wir gesehen haben (Teil I, S. 103 f.) — nicht unwesentlich durch peripatetische Lehrmeinungen bezüglich der μαθηματικά beeinflußt ist. In dieser Hinsicht ist die Mitteilung des Suidas von besonderem Interesse, wonach Hypatia, die Tochter Theons

[39]) vgl. auch die Aufgaben III, 19; V, 7 und das zugehörige 2. Lemma; 8, 21 u. 27. (S. dazu übrigens auch Teil I, S. 25 f.)

[40]) vgl. Heath, D. of Al., S. 8 ff. — Möglicherweise ist damit nicht einmal ein Werk Diophants gemeint. (Die πορίσματα am Schluß von I, 34 und 38 haben anderen Charakter, entsprechen aber, als corollaria, ebenfalls der euklidischen Terminologie.)

[41]) Pappus, Hultsch II, 636, 21; 648, 18 f. u. 866 ff.; Proklus in Eucl. 212, 13; 302, 11—13; — vgl. Heiberg, Litter.-gesch. Studien üb. Euklid, S. 78 f.

[42]) Das zeigt sich vor allem darin, daß er — wie Heron — „Flächen“ und „Längen“ ohne weiteres addiert bzw. voneinander subtrahiert — vgl. Hankel, a. a. O., S. 159; Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Diophantos, S. 1055.

von Alexandrien — des Herausgebers und Kommentators Euklids —, ein ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον geschrieben habe[43]). Dabei gehört Hypatia (gest. 415) selbst der Alexandrinischen Schule an, die mit der Pflege der Gelehrsamkeit und der einzelnen wissenschaftlichen, vor allem mathematischen Disziplinen eine besondere Hinneigung zum Aristotelismus verbindet, der hier freilich immer mit neuplatonischem Lehrgut durchsetzt erscheint. —

Was nun die Verwendung von „Brüchen" bei Diophant anbetrifft, so darf daraus keineswegs geschlossen werden, der Begriff des ἀριθμός umfasse auf der Stufe der Diophantischen Logistik den ganzen — wie wir heute sagen — „rationalen Zahlbereich". Um einen Bruch als „nicht ganze rationale Zahl" begreifen zu können, muß „Anzahl" selbst bereits als „Zahl" verstanden sein. Was ein solches Zahl-Verständnis seinerseits voraussetzt, werden wir in den beiden letzten Paragraphen zu betrachten haben. Bei Diophant jedenfalls bedeutet ἀριθμός — wie in der gesamten griechischen Mathematik — nichts anderes als „Anzahl von ...". Entsprechend versteht Diophant unter einem Bruch nichts anderes als eine Anzahl von Bruchteilen **der Recheneinheit** bzw. einen einzelnen solchen Bruchteil[44]). Die „Größe" dieses Bruchteils entspricht dem „Wieviel" der Teilung, der die μονάς unterworfen worden ist. Von diesem „Wieviel", also einem bestimmten ἀριθμός her hat deshalb der betreffende Bruchteil seinen Namen (τὸ ὁμώνυμον μόριον — vgl. Euklid VII, 37 und 38: Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι. Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει und Diophant, „Def. III", 6, 9 ff.; „Def. V", 8, 11 f.; „Def. VII", 8, 16 ff. — vgl. auch Teil I, S. 51). In analoger Weise werden auch die Ausdrücke τὸ δυναμοστόν, τὸ κυβοστόν usw. gebildet (vgl. S. 138). Je größer nun der ἀριθμός der Teilung, umso kleiner das durch die Teilung entstehende μόριον, und so wie die Anzahlen im Fortgang der Zählung — und also auch der Teilung — ins Grenzenlose wachsen (2, 16), so nehmen die Bruchteile der Einheiten ins Grenzenlose ab. So sagt auch das anonyme Scholion zu Jamblich, Pistelli 127 (2. Bd. der Tannery-Ausgabe des Diophant, S. 72): οὕτως ὁ Διόφαντος ἐν τοῖς Μοριαστικοῖς· μόρια γὰρ τὴν εἰς ἔλαττον τῶν μονάδων πρόοδον εἰς τὸ ἄπειρον[45]). In diesem Sinne bildet

[43]) s. 2. Bd. der Tannery-Ausgabe des Diophant, S. 36, 20 ff. — Zum Text vgl. ebda., S. VII f.

[44]) Das drückt sich übrigens zuweilen ebenfalls in der Schreibweise aus, z. B. M̊ 𐅵′ oder M̊ δ^ˣ, d. h. eine halbe bzw. eine viertel Monade. (Das Zeichen ˣ, einem Anzahl-Zeichen beigefügt, verwandelt dieses letztere in das Zeichen für den entsprechenden Stammbruch — s. weiter unten S. 146).

[45]) Es ist sehr wohl möglich, daß die hier erwähnten Μοριαστικά eine besondere Schrift Diophants dargestellt haben, die die Bruchrechnung zum Gegenstand hatte (vgl. Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Diophantos, S. 1071) und nicht bloß Scholien zu den ent-

die μονάς in der Tat die „Grenzscheide zwischen dem Anzahl-Bereich und dem Bereich der Bruchteile“ (ἀριθμοῦ καὶ μορίων μεθόριον), wie die Stelle bei Jamblich (Pistelli 11, 9—11), auf die jenes Scholion Bezug nimmt, die μονάς definiert[46]. Die μονάς selbst wird in ihrem Maß-charakter von irgend einer Teilung nicht betroffen[47]. Geteilt wird nur das an ihm selbst teilbare körperliche oder auch nur geometrisch-lineare Maß-„Stück“ selbst (vgl. Teil I, S. 47f.; 98; 102; 105). Wird ein Einheitsstück-Bruchteil soviel Mal vervielfältigt, als die homonyme Anzahl angibt, so wird das ganze ursprüngliche Einheitsstück wiederhergestellt („Def. V“, 8, 11f.). Andererseits lassen sich durch Maßänderung die Bruchteile der ursprünglichen Einheit in Anzahlen einer neuen Einheit verwandeln (vgl. Teil I, S. 105), was bei Diophant in den Aufgaben I, 23, 24, 25, III, 14, VI, 2 und 16 in der Tat auch geschieht[48]. Überdies besteht bei Diophant das Bestreben, dort, wo die Einführung eines neuen Maßes dem Sinn der Aufgabe widerspricht, die Lösungen jeweils nur in einem bestimmten Bruchteil (ἓν μόριον) der μονάς anzugeben (besonders deutlich in den Aufgaben IV, 34, 35 — vgl. auch IV, 22, 37 usf.).

Von dem bei Diophant maßgebenden Anzahl-Begriff aus ist es vollends unmöglich, zu dem Begriff der „negativen“ und dem der „irrationalen“ Zahl zu gelangen. Um „negative“ und „irrationale“ Lösungen zu vermeiden, wird daher auch jeweils eine einschränkende Bedingung (ein προσδιορισμός) eingeführt. Eine Gleichung, die zu einer „negativen“ oder „irrationalen“ Lösung führt, ist ἀδύνατος oder auch οὐ ῥητή, wie es auch ἄτοπον ist, solche „Lösungen“, insbesondere einen ἀριθμὸς οὐ ῥητός anzugeben (vgl. 312, 17—19; 250, 14 — dazu 251, Anm.; 424, 12f.; 204, 19f.; 208, 7; 210, 1f.; 212, 6f.; 264, 12f.; 270, 4—6). Ein ἀριθμὸς οὐ ῥητός ist eben überhaupt kein ἀριθμός[49]. Ebensowenig

---

sprechenden „Definitionen“ im Prooemium der „Arithmetik“, wie Tannery vermutet (2. Bd. der Diophant-Ausgabe, S. 72, Anm. 2) oder gar diese „Definitionen“ selbst (vgl. Heath, D. of Al., S. 3f.). — Vgl. hierzu auch 288, 1ff.

[46]) Jamblich schreibt diese Definition gewissen „Pythagoreern“ zu, was in seinem Munde nicht viel besagen will. Dem Wortlaut des Scholion gemäß könnte sehr wohl Diophant ihr Urheber sein.

[47]) „Def. VI“, 8, 13f. (vgl. 6, 6f.): Τῆς οὖν μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης καὶ ἑστώσης ἀεὶ ... Theor. von Alexandrien gibt gerade diese Stelle in seinem Ptolemaios-Kommentar wieder: τῆς γὰρ μονάδος ἀμεταθέτου οὔσης καὶ ἑστώσης πάντοτε ... (2. Bd. der Tannery-Ausgabe des Diophant, S. 35).

[48]) Es handelt sich in diesen Fällen um πυθμένες, um die kleinsten Anzahlen also, die die vorgegebenen Verhältnisse erfüllen. Diesen Sachverhalt hatte wohl Commandino im Auge, als er irrtümlicherweise die πυθμένες mit den ὑποστάσεις bei Diophant identifizierte (Pappus, Hultsch I, S. 81, Anm.).

[49]) Diese Auffassung bleibt, trotz des veränderten Anzahl-Begriffs, bis ins 16. Jahrh. hinein maßgebend. Frater Fridericus um 1460: surdus numerus non est numerus. Nam numerus est, quem unitas mensurat (vgl. Teil I, S. 102); Mi-

kann es einen Bereich „negativer Anzahlen“ geben. Eher schon ließen sich die Bruchteile der Einheit, im Sinne jener von Jamblich überlieferten Definition der Eins als des μεϑόριον zwischen den Anzahlen und den Bruchteilen, zu einem besonderen Bereich des „Wieviel“ zusammenfassen, der gleichsam die Fortsetzung des Anzahl-Bereichs jenseits der Eins darzustellen hätte. Daß diese Auffassung Diophant in der Tat nicht fremd ist, zeigt sich in einer Reihe von Formulierungen, wo die μόρια (und übrigens auch die Eins selbst) als eine Art von ἀριϑμοί verstanden werden (vgl. insbesondere die Aufgaben IV, 12, 22, 23, 24, 26 und auch S. 138, Anm. 32). Das ändert aber nichts an dem grundsätzlichen Verständnis der „Brüche“ als der Bruchteile der jeweiligen Recheneinheit, wie wir es oben dargelegt haben.

Das bisher über den Anzahl-Begriff bei Diophant Gesagte erweist sich als unmittelbare Folge derjenigen Bestimmtheit des ἀριϑμός, die in seinem Charakter als ἀριϑμός τινος beschlossen liegt (vgl. Teil I, S. 54, 55). Für das Verständnis des Folgenden ist es aber nicht minder wesentlich, einzusehen, daß auch die andere Bestimmtheit am ἀριϑμός, wonach die von ihm gemeinten Gegenstände gerade so und so viele sind, bei Diophant — wie in der gesamten griechischen Mathematik — ebenfalls erhalten bleibt. — Wir stehen hier vor der schwerwiegenden Frage, ob nicht die Diophantische Logistik von sich aus auf die Möglichkeit eines symbolischen Rechenverfahrens verweist. Seit Vieta wird diese Frage grundsätzlich bejaht, und zwar auch und gerade dann, wenn man in der Diophantischen Wissenschaft nur die primitive „Vorstufe“ der modernen Algebra erblickt. Von der modernen Algebra aus gesehen scheint (im Wesentlichen) nur ein einziger Schritt nötig zu sein, um die Diophantische Logistik zur Vollendung zu bringen: die durchgängige Ersetzung der „bestimmten Zahlen“ durch „allgemeine“ Zahlenausdrücke, der numerischen Werte durch symbolische, — ein Schritt, der nach mancherlei Fortschritten in der Behandlung von Gleichungen überhaupt, schließlich eben von Vieta vollzogen wurde. Die Entwicklung, die so von Diophant über die Araber und die italienischen Algebraiker des 16. Jahrh. zu Vieta führt, wird als eine von der Sache selbst geforderte, gleichsam lineare Aufwärtsbewegung verstanden. Dieser Auffassung kommen vor allem zwei Umstände entgegen: 1. die Rechnung mit dem Zeichen der zu suchenden Größe bei Diophant, wobei dieses Zeichen in das schrittweise sich entwickelnde Lösungsverfahren selbst aufgenommen wird (Hultsch, Pauly-Wissowa, v. Diophantos, S. 1059f.); 2. das Vorliegen einer allgemeinen Darstellung mathematischer, speziell auch arithmetischer Sachver-

chael Stifel in seiner „Arithmetica integra“, 1544: irrationalis numerus non est uerus numerus — s. Tropfke, Gesch. d. Element.-Math. II $^3$, 91 u. 92. Vgl. ferner die Meinung von Peletier (1560) weiter unten S. 204, Anm. 172.

halte bei Euklid, die für die griechische Mathematik insgesamt vorbildlich ist und die man als „geometrische Algebra" zu verstehen geneigt ist. Von dem zweiten Punkt ist bereits oben (S. 126ff.) die Rede gewesen. Wir haben hier nur zu dem ersten Punkt, dem Gebrauch des Zeichens für die Unbekannte bei Diophant selbst Stellung zu nehmen.

Der „ἀριθμός" — in der speziellen Diophantischen Bedeutung der unbekannten Anzahl — ist definiert als ἔχων ἐν ἑαυτῷ πλῆθος μονάδων ἀόριστον und wird durch das Zeichen ς wiedergegeben (6, 4f. — zum Text vgl. 2. Bd. der Tannery-Ausgabe, S. IXf.). Die Unbestimmtheit der Monaden-Menge, die die unbekannte Anzahl enthält, ist aber eine solche nur πρὸς ἡμᾶς. Der Sinn jeder einzelnen Aufgabe liegt ja gerade darin beschlossen, daß eine ganz bestimmte Anzahl von Monaden jeweils die Aufgabe erfüllt. Indem die Unbekannte bzw. deren Zeichen in das Lösungsverfahren aufgenommen wird, ist es gerade nicht ihre Unbestimmtheit im Sinne einer möglichen Bestimmtheit, die da gemeint ist. Genau so, wie die Lösung ἐν τῷ ἀορίστῳ immer nur eine vorläufige ist (vgl. S. 140) und der Begriff der ἀριθμοὶ ἀόριστοι nur auf dem Hintergrunde der Vorstellung von untereinander „ähnlichen", d. h. zunächst nur der Gestalt nach, nicht in ihren bestimmten Maßen gegebenen, Figuren ganz verständlich wird (vgl. S. 141), so ist auch die Unbekannte nur von der vollzogenen Lösung her als πλῆθος ἀόριστον, d. h. also nur als „vorläufig unbestimmt" zu charakterisieren und als eine in ihrem Wieviel genau zu bestimmende Anzahl im Sinne eben jener anderen ἀριθμοὶ ἀόριστοι zu verstehen. — Auch ist es nicht angängig, bei den Ausdrücken δύναμις, κύβος, δυναμοδύναμις, δυναμόκυβος und κυβόκυβος ohne weiteres von „Potenzen der Unbekannten" zu sprechen. Wir müssen vielmehr darauf achten, in welcher Weise diese Termini bei Diophant selbst eingeführt werden. Nachdem er die ins Grenzenlose gehende Reihe der Anzahlen erwähnt hat (2, 16), zählt er als darunter fallend (ἐν τούτοις — 2, 17) die quadratischen und kubischen Anzahlen auf, ferner diejenigen Anzahlen, die sich aus der „Quadrierung" einer quadratischen, aus der Multiplikation einer quadratischen mit der entsprechenden (d. h. auf die gleiche Wurzel zurückgehenden) kubischen und endlich aus der „Quadrierung" einer kubischen Anzahl ergeben[50]). Indem diese Anzahlen (und ihre Wurzeln) miteinander in

[50]) Mit Ruska (Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Sitz.-Ber. d. Heidelb. Ak. d. Wiss., Philos.-hist. Kl., 1917, 2. Abh., S. 68f.) sind wir der Meinung, daß die Worte δυναμοδυνάμεων — 4, 1, δυναμοκύβων — 4, 3 und κυβοκύβων — 4, 6 gestrichen werden müssen, da die συντομώτεραι ἐπωνυμίαι (4, 13) doch erst von 4, 14 an eingeführt werden. Während δύναμις und κύβος sich unmittelbar aus dem Vorhergehenden (2, 18—22) ergeben (4, 14—18), werden für δυναμοδύναμις, δυναμόκυβος und κυβόκυβος die oben gegebenen Bestimmungen (4, 1—7) erst genau wiederholt (4, 19—6, 2).

verschiedener Weise verknüpft werden, fährt Diophant fort, entstehe das Geflecht der meisten „arithmetischen" Aufgaben (4, 7—10). Werden aber nun, wie üblich, diese Anzahlen — hinsichtlich ihrer Art — durch einen, diese ihre Art kurz andeutenden, Namen gekennzeichnet, so ließen sie sich geradezu als Elementarbestandteile der „arithmetischen" Wissenschaft ansprechen (4, 12—14). Diese Namen seien δύναμις, κύβος, δυναμοδύναμις, δυναμόκυβος, κυβόκυβος, wobei jeder von ihnen innerhalb der folgenden Problemauflösungen noch durch ein „Zeichen" (σημεῖον): $\Delta^Y$, $K^Y$, $\Delta^Y\Delta$, $\Delta K^Y$, $K^YK$ wiedergegeben werden soll (4, 14—6, 2). — In diesem ganzen Zusammenhang ist von einer unbekannten bzw. „unbestimmten" Anzahl gar nicht die Rede. Erst jetzt wird der Ausdruck „ἀριθμός" in der Bedeutung eines πλῆθος μονάδων ἀόριστον samt seinem Zeichen ꞩ sowie das Zeichen für die unwandelbare μονάς $\overset{\circ}{M}$ eingeführt (6, 3—8). — Haben also innerhalb des Auflösungsverfahrens die durch $\Delta^Y$, $K^Y$, $\Delta^Y\Delta$, $\Delta K^Y$ und $K^YK$ wiedergegebenen Anzahlen zu ihrer πλευρά (vgl. 2, 19f.) immer nur den jeweiligen ꞩ, so sind sie doch von Hause aus keineswegs nur als Potenzen einer unbekannten bzw. „unbestimmten" Anzahl zu verstehen. Sie sind es darum nicht, weil sie eben auch als Potenzen des ꞩ nur Abwandlungen einer bestimmten Anzahl von Monaden darstellen. Genau dasselbe gilt auch für die allen diesen Anzahlen homonymen Bruchteile, nämlich das μόριον „ἀριθμοστόν", „δυναμοστόν", „κυβοστόν", „δυναμοδυναμοστόν", „δυναμοκυβοστόν", „κυβοκυβοστόν" (6, 9—21 — vgl. oben S. 142). Deshalb ist auch das Zeichen ☓ (6, 20f.) nicht auf die genannten Bruchteile beschränkt, sondern auf alle Stammbrüche anwendbar (vgl. S. 142, Anm. 44). — dazu 2. Bd. der Tannery-Ausgabe, S. XLII f.). — Es besteht also keine scharfe Grenze zwischen den „bestimmten" Anzahlen (οἱ ὡρισμένοι — 6, 6f.) und den „unbestimmten" (ἀόριστοι)[51]). Es ist daher auch durchaus berechtigt, wenn Maximus Planudes (Ende des 13. Jahrh.) in seinen Scholien zu den beiden ersten Büchern Diophants die in den Multiplikationsregeln IV—VIII (8, 11—12, 18) ausgesagten Sachverhalte an bestimmten Anzahlen erläutert (2. Bd. der Tannery-Ausgabe, S. 127 ff.), obgleich diese Sachverhalte bei Diophant nur im Hinblick auf den Umgang mit den besonderen, durch die Zeichen $\Delta^Y$, $K^Y$, $\Delta^{Y\times}$, $K^{Y\times}$ usw. dargestellten Anzahlen besonders hervorgehoben werden. Daß die Multiplikation einer solchen Anzahl mit dem homonymen Bruchteil der Einheit Eins ergibt („Def. V"), ist lediglich darin begründet, daß dies für die Multiplikation jeder Anzahl mit dem homonymen Bruchteil der Einheit gilt (vgl. S. 143). Daß die Multiplikation verschiedener Bruchteile der Einheit wiederum Bruchteile ergibt, die homonym sind

[51]) Diese Termini begegnen bekanntlich bereits bei Thymaridas (Jamblich, Pistelli 62, 19 f.). — vgl. Teil I, S. 45.

dem Produkt der den ursprünglichen Bruchteilen homonymen Anzahlen („Def. VII"), gilt ebenfalls für alle Anzahlen und darum auch für jene besonderen, im Lösungsverfahren auftretenden, zunächst noch „unbestimmten" Mengen von Monaden. Auf die „Def. VI", die die Multiplikation mit der Einheit selbst betrifft, werden wir von einem anderen Gesichtspunkt aus sofort einzugehen haben. Jedenfalls handelt es sich bei allen diesen Multiplikationsregeln nicht um „Definitionen"[52]) im Euklidischen Sinne und vor allem auch nicht im modernen Sinne, wodurch gewisse Beziehungen zwischen neu eingeführten Größen — und damit auch diese selbst — erstmalig festgesetzt werden, sondern um immer schon innerhalb des gewöhnlichen Anzahlbereichs angewandte Rechenregeln, die hier nur noch mit Rücksicht auf die ungewohnte Benennungsweise ausdrücklich bestätigt werden. Und zwar sind diese Regeln bereits aus den Benennungen selbst zu entnehmen (ἔσονται δέ σοι καταφανεῖς διὰ τὸ προδεδηλῶσθαι σχεδὸν διὰ τῆς ὀνομασίας — 6, 24 f.), sofern nämlich die betreffenden Ausdrücke unmittelbar die multiplikative Zusammensetzung der von ihnen gemeinten Anzahlen erkennen lassen.

Wie ist aber nun jene Benennungsweise genauer zu verstehen? Sie betrifft, wie wir oben sagten, die „Art", das εἶδος der Anzahlen. — Es handelt sich bei Diophant freilich nicht mehr um das εἶδος im ursprünglichen pythagoreisch-platonischen Sinne, als die jeweilige einheitsstiftende und damit erst die Anzahlen in ihrem Sein ermöglichende, eigenständige Artbeschaffenheit (vgl. Teil I, S. 59 ff.; 70). Dennoch bedeutet auch bei Diophant das εἶδος einer Anzahl — wie bei den neuplatonischen Arithmetikern[53]) — die für sie charakteristische Artbeschaffenheit, die sie mit anderen Anzahlen teilt und in der sie sich wiederum von anderen unterscheidet, woraus sich also eine klassifizierende Einteilung der Anzahlen gewinnen läßt. Nur daß diese „Artbeschaffenheit" hier eher peripatetisch-euklidisch als bloße Eigenschaft der betreffenden Anzahlen verstanden wird (vgl. Teil I, S. 103 f.). Alle Anzahlen, die in diesem Sinne ein und dasselbe εἶδος aufzuweisen haben, gehören ein und derselben „Klasse" an, genau so wie z. B. alle Hunderter ein und derselben τάξις angehören (vgl. Pappus, Hultsch I, S. 20, 14 f.; Domninos, a. a. O., S. 415, 16 ff.), wobei es sehr wohl möglich ist, daß dieselbe Anzahl in anderer Hinsicht auch zu einer anderen Klasse gezählt werden kann. Die auf einem solchen abgeschliffenen

[52]) Dieser Ausdruck mit fortlaufender Numerierung ist nur von Bachet zur klareren Übersicht über die einzelnen Abschnitte des Prooemium gewählt worden, offensichtlich in Anlehnung an die kanonische mathematische Terminologie.

[53]) Das gilt insbesondere vom ἀριθμὸς τετράγωνος und κύβος — 2, 18 ff.; 4, 14—18; vgl. Teil I, S. 36 ff.; 59 f.; ferner Euklid VII, Def. 19 u. 20. (S. auch Nesselmann, a. a. O., S. 201.)

εἶδος-Begriff[54]) beruhende Klassifikation hat also keine ontologische, sondern nur instrumentale Bedeutung. So stellen im Hinblick auf ihre multiplikative Zusammensetzung alle Anzahlen, die sich mit Hilfe der Zeichen $\varsigma$, $\Delta^{Y}$, $K^{Y}$ ..., $\varsigma^{\times}$, $\Delta^{Y\times}$ ... wiedergeben lassen, je ein εἶδος dar, während alle Anzahlen, die mit Hilfe des Zeichens $\overset{\circ}{M}$ geschrieben werden, ebenfalls ein εἶδος für sich bilden (vgl. z. B. 114, 1 f.: τὰ λοιπὰ . . . εἴδη τῶν ς καὶ τῶν $\overset{\circ}{M}$). So heißt es von dem Zeichen $\times$, daß es das betreffende εἶδος (z. B. $K^{Y\times}$) von dem homonymen εἶδος ($K^{Y}$) unterscheiden lasse (διαστέλλουσα τὸ εἶδος — 6, 21). So wird im Hinblick auf die genannten Klassen vom Dividieren einer Anzahl durch eine Anzahl einer anderen Klasse geredet (οἱ μερισμοὶ τῶν προκειμένων εἰδῶν — 14, 2) und Übung im additiven, subtraktiven und multiplikativen Verknüpfen von Anzahlen derselben bzw. verschiedener Klasse empfohlen (14, 3—10). Endlich geht die allgemeine Regel (14, 11—23) für die Behandlung von Gleichungen 1. Grades (bzw. rein quadratischer, rein kubischer usf.) gerade dahin, die Anzahlen nach ihrer Klassenzugehörigkeit zu ordnen und zusammenzufassen, bis schließlich auf beiden Seiten (μέρη) der Gleichung nur noch Anzahlen von je einer Klasse übrigbleiben (ἕως ἂν ἓν εἶδος ἑνὶ εἴδει ἴσον γένηται — 14, 14)[55]). — Es ist nun von größter Tragweite, daß hier überall unmittelbar von den εἴδη selbst die Rede ist, nicht etwa von den Anzahlen, die je einem bestimmten εἶδος angehören. Besonders deutlich ist dies an der „Def. VI", wonach bei der Multiplikation mit der Einheit das multiplizierte εἶδος dasselbe εἶδος bleibt (τὸ πολυπλασιαζόμενον εἶδος . . . αὐτὸ τὸ εἶδος ἔσται — 8, 14 f.). Und ganz ausdrücklich wird in Bezug auf die Aufgaben gesagt, deren „Stoff" sei vorwiegend in den εἴδη als solchen konzentriert (πλείστην ἔχοντες τὴν ἐπ' αὐτοῖς τοῖς εἴδεσι συνηθροισμένην ὕλην — 14, 25—27), d. h. die Darstellung und Auflösung der Aufgaben vollziehe sich im Wesentlichen an den εἴδη selbst. Damit ist nicht gesagt, daß diese εἴδη als solche Anzahlen seien. Vielmehr gilt, wie wir oben dargelegt haben, daß sie nur die „Artbeschaffenheit" jeweils bestimmter Anzahlen darstellen. Wenn die

---

[54]) wie er ja auch sonst allgemein üblich ist und von Diophant z. B. zur Kennzeichnung einer bestimmten Art von Gleichungen verwandt wird (vgl. 96, 9: καὶ τοῦτο τὸ εἶδος καλεῖται διπλοισότης — vgl. S. 138).

[55]) Entsprechendes gilt von den Gleichungen, bei denen schließlich auf der einen Seite nur noch Anzahlen zweier Klassen übrigbleiben und deren Auflösungsweise Diophant später anzugeben verspricht (ὕστερον δέ σοι δείξομεν καὶ πῶς δύο εἰδῶν ἴσων ἑνὶ καταλειφθέντων τὸ τοιοῦτον λύεται — 14, 23 f.). Dieses Versprechen wird Diophant vermutlich in den verloren gegangenen Teilen des Werkes eingelöst haben. In den uns überlieferten Büchern wird das Auflösungsverfahren für solche Gleichungen einfach vorausgesetzt, doch finden sich hier auch gelegentlich Hinweise auf die betreffende Regel (vgl. dazu Nesselmann, a. a. O., S. 264 ff., 317—324; Heath, D. of Al., S. 6 ff.; 59 ff.; auch Tropfke III², 40 f.).

Multiplikation mit der Einheit das εἶδος nicht verändert, so ist das wiederum nur so zu verstehen, daß jede „einmal“ genommene Anzahl (wie auch jeder „einmal“ genommene Einheitsbruchteil) in ihrem Wieviel und folglich auch in ihrer „Art“ unberührt bleibt. Während umgekehrt jede multiplikative Veränderung der „Art“, wie sie z. B. in der „Def. VIII“ (10, 1—12, 18) angegeben wird, auf einer Veränderung in der multiplikativen Zusammensetzung der betreffenden Monaden-Menge beruht. — Wir haben, mit anderen Worten, auch hier zwischen dem Verfahren und dem Gegenstand streng zu unterscheiden: während das Verfahren sich an den εἴδη vollzieht, die als solche vom jeweiligen πλῆθος μονάδων unabhängig — und in diesem Sinne καθόλου — sind, ist doch der in ihnen jeweils gemeinte Gegenstand immer wieder eine bestimmte Anzahl von Monaden. Hier, auf mathematischem Gebiet, spiegelt sich so — in gebrochener und dem ursprünglichen Phänomen freilich nicht angemessener Weise — die auf dem Boden griechischer Begrifflichkeit „selbstverständliche“, von der aristotelischen Ontologie eindringlich herausgestellte Beziehung zwischen dem εἶδος und dem einzelnen Gegenstand, in der Sprache der Schule: zwischen der δευτέρα und der πρώτη οὐσία[56]): so wie der einzelne Gegenstand eben das ist, was wir in seinem εἶδος ansprechen, und daher der „wissenschaftlichen“ Behandlung nur in diesem seinem εἶδος zugänglich ist, — so sind die Anzahlen, deren Auffindung sich die Diophantischen Aufgaben zum Ziele setzen, dem „wissenschaftlichen“ Zugriff nur in ihrer „eidetischen“ Beschaffenheit faßbar und dies eben darum, weil mit dem jeweiligen εἶδος immer eine ganz bestimmte Anzahl von Monaden gemeint ist. So andersartig auch die Diophantische „Arithmetik“ der neuplatonischen „arithmetischen“ Wissenschaft gegenüber erscheint, — in diesem Punkte ist sie mit ihr durchaus vergleichbar; auch sie hat es mit dem πλῆθος der Monaden wesentlich nur im Medium der εἴδη zu tun (vgl. Teil I, S. 26 ff.; 41 ff.; 63 f.).

Was die Diophantischen εἴδη von jenen anderen unterscheidet, ist — abgesehen von der Beschränkung auf wenige, durch Multiplikation entstandene, „figurierte“ und den „figurierten“ entsprechende Anzahlen[57]) — ihre rein instrumentale Bedeutung. Innerhalb des Rechenverfahrens selbst werden die εἴδη als besondere Recheneinheiten verwandt, genau in demselben Sinne, in dem bei Archimedes und Apollonius Einheiten höherer Ordnung begegnen (vgl. S. 137) und in dem auch γ sonst die μυριάς benutzt wird (vgl. bei Diophant selbst 332, 8 f.: β′ M ᾱ καὶ α′ ͵ηψμζ καὶ M̊ ͵δφξ = δευτέρων μυριάδων ᾱ καὶ πρώτων ͵ηψμζ καὶ μο-

[56]) vgl. Aristoteles, Metaph. Z 6; Kat. 5.

[57]) vgl. Teil. I, S. 37; 38; 42; dazu auch Diophant's Schrift über die Polygonalzahlen (450).

νάδων ͵δφξ̄ [57a])). So wird auch das Zeichen der gewöhnlichen Einheit M̊ völlig parallel zum Zeichen ς eingeführt: ... ἔστιν αὐτοῦ (sc. „ἀριθμοῦ") σημεῖον τὸ ς. ἔστι δὲ καὶ ἕτερον σημεῖον τὸ ἀμετάθετον τῶν ὡρισμένων ἡ μονὰς ... M̊ (6, 5—8), und von εἴδη μὴ ὁμοπληθῆ, d. h. von nicht in der gleichen Anzahl „vorhandenen" bzw. „fehlenden" εἴδη, z. B. Δ^Υ η̄ ⋔ Δ^Υ β̄ (acht „Quadrate" weniger zwei „Quadrate") in demselben Sinne gesprochen, in dem sonst von verschiedenen Anzahlen gewöhnlicher Monaden die Rede ist (14, 5f. und 12). Das kann geschehen, weil eben auch jedes εἶδος, in jedem einzelnen Fall, genau wie die μυριάς, eine feste Anzahl von Einsen meint.

Bei alledem darf nicht vergessen werden, daß alle Zeichen, die Diophant verwendet, lediglich Wortabbreviaturen sind. Dies gilt insbesondere auch für das Zeichen des „Fehlens" ⋔ (12, 21) und für das Zeichen der unbekannten Anzahl ς, von dem Heath überzeugend nachgewiesen hat, daß es nichts als eine Ligatur für αρ (= ἀριθμός) darstellt (vgl. Heath, D. of Al., S. 32—37[58]); über ⋔ daselbst S. 42f.). Bereits Nesselmann hat deshalb (a. a. O., S. 302) das von Diophant geübte Verfahren eine „synkopierte Algebra" genannt, welche den Übergang von der frühen „rhetorischen" zur modernen „symbolischen" bilde. (Nach Nesselmann gehört sogar Vieta's Rechenweise der Stufe der synkopierten Algebra an.) Léon Rodet (Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVI siècle, 1881, S. 69) hat mit einigem Recht dieser Einteilung die These entgegengesetzt, man dürfe überhaupt nur zwei Algebra-Typen anerkennen, nämlich „l'algèbre des abbréviations et des données numériques" und „l'algèbre symbolique". Zum ersten Typus gehört fraglos auch die Diophantische „Arithmetik". Vom zweiten Typus sagt Rodet, daß er „n'a pris naissance que lorsqu'on eut eu l'idée de représenter les données du problème sous forme générale par un symbole, de symboliser également les opérations chacune par un signe spécial". Auf diese Weise gelange man auch zu allgemeinen Lösungen, mag es sich um Zahlen, um Figuren oder um Naturerscheinungen handeln. Für die geschichtliche Betrachtung ist aber gerade dies das eigentliche Problem: wie war es überhaupt möglich, daß man angesichts eines begrifflich in sich geschlossenen Rechenverfahrens, wie es in der Diophantischen „Arithmetik" vorbildlich zum Ausdruck gelangt, die „Idee" einer symbolischen Algebra konzipierte? Die Frage lautet genauer: welche Umwandlung mußte das Verständnis von so etwas wie „Anzahl" erleiden, damit ein neues „symbolisches" Rechenverfahren aus der Diophantischen Tradition erwachsen konnte? — Die „Arithmetik"

[57a]) also in unserer Schreibweise: 1.8747.4560 (vgl. S. 137, Anm. 30).

[58]) Vgl. hierzu Heron, Opera (Schmidt-Heiberg) IV, 175.

Diophants mag selbst auf eine vor- und ungriechische, vielleicht sogar „symbolische“ Zähl- und Rechentechnik zurückweisen (vgl. S. 130 f.). Die Leichtigkeit, mit der Diophant die Multiplikation von Ausdrücken durchführt, die sich aus Anzahlen verschiedener „Art“ zusammensetzen, die Selbstverständlichkeit, mit der er überhaupt solche Ausdrücke handhabt, die Art ferner, in der er das Multiplizieren mit „fehlenden“ Größen lehrt, ohne doch „negative“ Anzahlen als solche für möglich zu halten[59]), die rein instrumentale Verwendung des εἶδος-Begriffes endlich, — das alles zeigt in der Tat eine innere Spannung an zwischen dem behandelten „Stoff“ und dem Charakter der Begriffe, in die dieser Stoff hier gezwängt wird. Für die Entstehung der modernen Algebra und der algebraischen Formelsprache ist aber nun gerade die direkte Rezeption des Diophantischen Werkes und seiner Begriffe entscheidend gewesen. Der indirekte, über die Araber führende Weg, auf dem die Entstehung der modernen Algebra zurückverfolgt werden kann, führt freilich ebenfalls zu griechischen Quellen, zu Diophant und zu Anatolius[60]), doch bricht sich auf diesem Wege auch jene vorgriechische Tradition ihre selbständige Bahn. Von Leonardo von Pisa (Anfang des 13. Jahrh.) an über die Coss bis zu Michael Stifel (1544), Cardan (1545), Tartaglia (1556—1560) und Petrus Nonius (Pedro Nuñez) (1567) erkämpft sich die „Algebra“ abseits von den traditionellen Disziplinen der Schule ihren Platz im System der abendländischen Wissenschaft. Während aber in der Technik des Rechnens, in der Einführung „negativer“, „irrationaler“ und sogar „imaginärer“ Rechengrößen (numeri absurdi oder ficti, irrationales oder surdi, impossibiles oder sophistici), in der Lösung kubischer Gleichungen, in der ganzen Art des Operierens mit Anzahlen und Anzahlen-Zeichen diese aus arabischen Quellen rezipierte „Algebra“ einen immer weiteren Ausbau erfährt, vermag sie doch nicht in ihrem Selbst-Verständnis mit ihrer eigenen Entwicklung Schritt zu halten. Sie wird sich ihrer eigenen „Wissenschaftlichkeit“ und ihres neuen „Zahl“-Begriffs erst in dem Augenblick bewußt, in dem sie unmittelbar auf die entsprechende griechische Wissenschaft, eben die „Arithmetik“ Diophants, stößt. — Unter dem Eindruck der Lektüre des Diophantischen Manuskripts verändert Bombelli den „technischen“ Charakter seines wahrscheinlich bereits um

[59]) vgl. S. 131, Anm. 17. — Bemerkenswert ist, daß Maximus Planudes, offenbar im Hinblick auf „Def. X“, wo von den λείποντα εἴδη immer nur im Zusammenhang mit den ὑπάρχοντα die Rede ist (14, 5 ff.), die „Def. IX“ in folgender Weise zu interpretieren sucht: Οὐχ ἁπλῶς λεῖψιν λέγει, μὴ καὶ ὑπάρξεώς τινος οὔσης, ἀλλὰ ὕπαρξιν ἔχουσαν λεῖψιν (2. Bd. der Tannery-Ausgabe des Diophant, S. 139).

[60]) Die Nomenklatur des Anatolius (vgl. S. 133, Anm.), die bis zur 9. Potenz der Unbekannten geht, findet sich bei den italienischen Algebraikern wieder (vgl. Tannery, Mém. scient. IV, 280 f.).



1550 niedergeschriebenen algebraischen Werkes[61]). Das 3. Buch der in der neuen Fassung 1572 erscheinenden „Algebra" enthält nun auch (in modifizierter — zum Teil „generalisierter" — Form) die Mehrzahl der Aufgaben aus den ersten fünf Büchern Diophants. Hier ist jetzt überall die ursprüngliche „Einkleidung" der Aufgaben, wie sie in den bisherigen „algebraischen" Werken allgemein üblich war, zugunsten einer „reinen", eben von Diophant übernommenen, Form verlassen[62]). An Stelle des Terminus „censo", der das dem griechischen δύναμις entsprechende arabische Wort („Vermögen") wiedergibt, tritt der Ausdruck „potenza"[63]); an Stelle von „cosa" (res) der Ausdruck „tanto" (nämlich entsprechend dem griechischen „ἀριθμός": „so und so viel")[64]). — 1575 erscheint die erste lateinische Übersetzung Diophants durch Xylander, die auch die Scholien des Maximus Planudes enthält; 1577 das algebraische Werk des Gosselin, das u. a. auch die Gleichungen Diophants behandelt. Endlich wird Diophant 1585 durch Stevin und 1591 durch Vieta in die moderne „symbolische" Form gebracht. Während bei Stevin, der in der Terminologie und Zeichensprache unmittelbar von Bombelli abhängig ist, der neue, dem „symbolischen" Verfahren zu Grunde liegende „Zahl"-Begriff als solcher zu voller Ausdrücklichkeit gelangt, wird bei Vieta die fundamentale Umwandlung der begrifflichen Grundlagen durch die Einführung einer allgemeiner mathematischen Symbolik faktisch vollzogen. Wir wenden uns daher zunächst dem letzteren zu.

## § 11.
## Vieta's Formelsprache und die Umwandlung des Anzahl-Begriffs.

### A. Vieta's Leben. Allgemeine Charakteristik seines Werkes.

Die mathematische Forschung Vieta's (1540—1603) ist in jedem Betracht für die Situation der „neuen" Wissenschaft um die Wende

[61]) vgl. die Vorrede zu: L'algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna, libri IV e V comprendenti „La parte geometrica" inedita, tratta dal manoscritto B 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna, pubblicata a cura di Ettore Bortolotti, Bologna, 1929 (Per la storia e la filosofia delle matematiche. Collezione diretta da Federigo Enriques, promossa dall'Istituto nazionale per la storia delle scienze), S. 9, 17—18. — Den Hinweis auf die Arbeiten Bortolotti's verdanke ich der Einleitung zur französischen Übersetzung Diophants von Paul Ver Eecke, Bruges 1926, S. LXIII ff. Diese Übersetzung zeichnet sich durch wörtliche Wiedergabe des Diophantischen Textes aus: sie vermeidet alle modernen Termini und Zeichen.

[62]) In der Ausgabe von 1579 der „Algebra" Bombelli's heißt es S. 414: „... ed'io solo habbia posta l'operatione delle dignità Arimetiche ... immitando gli antichi scrittori ..." (Ver Eecke, S. LXVII, Anm. 1). Vgl. Bortolotti, a. a. O., S. 16.

[63]) „Potentia" für δύναμις verwenden bereits Gerhard von Cremona (12. Jahrh.) und Leonardo von Pisa. Regiomontanus gebraucht dieses Wort gelegentlich sogar in verallgemeinertem Sinne (vgl. Tropfke II³, 160).

[64]) Bortolotti, a. a. O., S. 14; 16 (vgl. auch S. 50 f.).

des 16. Jahrh. charakteristisch. Das gilt insbesondere auch für die Stelle, die diese Forschung im Lebenszusammenhange Vieta's selbst einnimmt. Von Hause aus katholisch, aber an Glaubensfragen innerlich unbeteiligt, von Beruf Jurist, tritt er 24-jährig als Rechtsberater in den Dienst der Hugenottin Antoinette d'Aubeterre, Herrin von Soubise, und greift auch in der gleichen Eigenschaft in den — die Grundlagen des Staates erschütternden — Streit zwischen Katholiken und Calvinisten ein[65]. Daneben leitet er die Erziehung der Katharina von Parthenay (späteren von Rohan), der Tochter von Antoinette d'Aubeterre, deren treuer Freund und Berater er sein Leben lang bleibt. Von den für sie bestimmten Vorlesungen (1564—1568), die alle Wissensgebiete umfaßten, ist uns nur noch eine erhalten geblieben. Sie erschien zum ersten Mal 1637 in französischer Übersetzung unter dem Titel: „Principes de cosmographie"[66] und zeigt das besondere Interesse Vieta's für kosmologisch-astronomische Fragen an. Sein Hauptwerk, „Harmonicum coeleste", das niemals im Druck erschien, im Manuskript noch im 19. Jahrh. zugänglich war, seitdem aber durch die Schuld Libri's verschollen ist[67], scheint aus diesem ersten didaktischen Versuch herausgewachsen zu sein[68][69]. Alle mathematischen Forschungen Vieta's stehen in engem Zusammenhang mit dieser seiner kosmologisch-astronomischen Arbeit. Der „Canon mathematicus, seu, ad triangula" (1579), der auf den Arbeiten von Regiomontanus und Rhäticus fußt[70], sollte den vor-

---

[65]) vgl. Frédéric Ritter, François Viète, inventeur de l'algèbre moderne, 1540—1603. Essai sur sa vie et son œuvre (La revue occidentale philosophique, sociale et politique, Seconde série — Tome X, 1895), S. 239—241; 246. — Die Arbeit Ritter's ist bis heute die einzige Monographie über Vieta's Leben und Werke geblieben. Von Ritter stammt auch eine moderne französische Übersetzung der „Isagoge" und der „Notae priores ad logisticen speciosam" (Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, pubbl. da B. Boncompagni, I, 1868, S. 225—276).

[66]) Ritter, S. 242. [67]) Ritter, S. 269. [68]) Ritter, S. 241.

[69]) In der der „Isagoge" vorangehenden „Epistola" an Katharina von Parthenay sagt Vieta: „... tibi autem [debeo], o diva Melusinis, omne praesertim Mathematices studium, ad quod me excitavit tum tuus in eam amor, tum summa artis illius, quam tenes, peritia, immo vero nunquam satis admiranda in tuo tamque regii et nobilis generis sexu Encyclopaedia". Der sachliche Kern, den hier die barocke Ornamentierung des Stils verhüllt, ist wohl die Anspielung auf den Unterricht, den Vieta der Katharina von Parthenay einst erteilte und aus dem er die Anregung zu seinen eigenen weitreichenden Studien schöpfte. — Wie sehr er sich bei allen seinen mathematischen Arbeiten Katharina von Parthenay verpflichtet fühlte, zeigt auch die scherzhafte Bemerkung, die er dem 3. Theorem des 9. Kapitels seiner Schrift „Ad problema, quod ... proposuit Adr. Romanus, Responsum" voranstellt: „Cujus inventi laetitia adfectus, o Diva Melusinis, tibi oves centum pro una Pythagoraea immolavi".

[70]) vgl. Ritter, S. 251; 354—373; Zeuthen, Gesch. d. Math. im 16. u. 17. Jahrh., 1903, S. 115.

bereitenden „trigonometrischen" Teil des Hauptwerkes bilden[71]. Der zweite Teil des „Canons", „Universalium Inspectionum ad Canonem mathematicum liber singularis", gibt u. a. die bei der Aufstellung des Canons (constructio Canonis) angewandten Berechnungsmethoden an und lehrt insbesondere auch die Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke mit Hilfe der allgemeinen trigonometrischen Beziehungen, die zwischen den verschiedenen Bestimmungsstücken solcher Dreiecke bestehen. Diese Beziehungen stellt Vieta in Form von Tabellen zusammen, die sofort die jeweils für die Rechnung in Frage kommende Proportion (analogia) zwischen drei „bekannten" und einem „unbekannten" Stück eines Dreiecks abzulesen gestatten[72]. Von hier führt ein direkter Weg zu den Gleichungsaufgaben, wie sie in den zeitgenössischen „algebraischen" Werken Cardans, Tartaglias, Nuñez', Bombellis und Gosselins behandelt wurden. Durch die Hinweise von Peletier und Petrus Ramus[73], ferner durch Bombelli und Gosselin, vor allem aber durch die Übersetzung Xylanders mußte ja Vieta auf Diophants „Arithmetik" gestoßen werden[74], die er zweifellos auch im Original kennen lernte[75]. Und aus seiner Beschäftigung mit dem Diophantischen Werk erwächst schließlich seine symbolische Algebra deren Grundzüge er programmatisch in der 1591 erscheinenden „In artem analyticen Isagoge" entwirft. Von den hier angekündigten Schriften ist nur ein Teil zu Lebzeiten Vieta's erschienen. In hohe Staatsstellungen berufen, Ratgeber Heinrichs III. und Heinrichs IV.[76] fand er — abgesehen von Gelegenheitsschriften[77] — kaum Zeit, seinen

[71] Ritter, S. 242; vgl. S. 354.

[72] vgl. Ritter, S. 251, 255 f., 366 ff.

[73] vgl. Jacobi Peletarii Cenomani De occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo, Paris 1560: hier wird in der Praefatio die Meinung erwähnt, wonach Diophant als der Begründer der Algebra anzusehen sei. — Ramus kennt bereits 1569 Diophant als Verfasser der „Arithmetik": „. . . Diophantus cujus sex libros, cum tamen author ipse tredecim polliceatur, graecos habemus de arithmeticis admirandae subtilitatis artem complexis, quae vulgo Algebra arabico nomine appellatur . . ." (Scholarum mathematicarum libri unus et triginta, lib. I, zitiert nach der Ausgabe von L. Schoner, Frankfurt 1599, p. 35). — Im „Univ. Insp. ad Can. math. lib. sing.", Taf. 71, nimmt Vieta übrigens ausdrücklich auf Petrus Ramus Bezug und nennt ihn hierbei „homo λογικώτατος".

[74] Bereits 1579 zitiert Vieta im „Univ. Insp. ad Can. math. lib. sing.", Taf. 30, Diophant I 27, und zwar offensichtlich nach der Ausgabe Xylanders (hier die 30. Aufgabe des 1. Buches).

[75] vgl. Cantor II², 630, Anm. 4. — Vieta konnte vermutlich das damals im Besitz von Katharina von Medici befindliche Manuskript (jetzt Parisinus 2379) einsehen, das eine Abschrift zweier älterer Vaticanischer Codices darstellt und das später Bachet für seine Diophant-Ausgabe benutzte. (Auf das Vorhandensein Diophantischer Manuskripte hatte bereits 1463/64 Regiomontanus hingewiesen.)

[76] Ritter, S. 246 — 250 — 258.

[77] Es sind dies: 1. die gegen Scaliger gerichteten polemischen Schriften (Ritter, S. 260, 262); 2. die Lösungen der von Adriaen van Roomen und von Vieta selbst ge-

mathematischen Arbeiten eine endgültige, für die Publikation geeignete Form zu geben[78]).

Es ist nicht unwichtig, sich klar zu machen, daß die Entwicklung der modernen Mathematik von Anfang an durch kosmologisch-astronomische Interessen geleitet ist. Das gilt sowohl von Vieta wie von Kepler, Descartes, Barrow, Newton usf. In dieser Hinsicht wiederholt die „neue“ Wissenschaft den Gang der antiken (vgl. Teil I, § 7 A). Aber die Art, in der hier die mathematische Erfassung des Weltbaus angesetzt wird, zeigt auch von vornherein ein anderes Welt-Verständnis, ein anderes Verständnis des Weltseins als solchen, das von den Begründern der modernen Naturwissenschaft selbst in seinen Voraussetzungen zumeist nicht durchschaut wird und daher zu einer Spannung innerhalb der von ihnen begründeten Wissenschaft führt: das antike Erbe gerät allmählich in Widerstreit zu der von einer neuen ontologischen Auffassung getragenen modernen Erkenntnisweise. Dieser Widerstreit führt im 19. Jahrh. zu einer neuen, „formalisierten“ Grundlegung der infinitesimalen Analysis und wirkt sich heute in dem Kampf um die Prinzipien der mathematischen Physik aus. Er ist im Keim bereits bei Vieta vorhanden.

Im Gegensatz zu vielen Zeitgenossen, z. B. auch zu Petrus Ramus und Bacon, führt Vieta's umfassende humanistische Bildung ihn nicht etwa zu einer ausdrücklichen Opposition gegen die überlieferte Wissenschaft. Aber wie jene wendet er sich mit Vorliebe den bisher vernachlässigten oder unbekannten Quellen der antiken Bildung zu. Er will in jeder Hinsicht der treue Bewahrer, Wiederentdecker und Fortsetzer unserer antiken Lehrmeister sein[79]). Das „Harmonicum coeleste“,

---

stellten Aufgaben (Ritter, S. 264—267; Zeuthen, a. a. O., S. 119 ff.); 3. Arbeiten zur Kalenderreform, auf die Vieta selbst den größten Wert legte und die ihn am Ende seines Lebens zu einer — ungerechtfertigten — Polemik gegen Clavius fortrissen (Ritter, S. 270—273).

[78]) Ritter, S. 270; 374; 370. — Vgl. insbesondere den Brief von Marino Ghetaldi an M. Coignet (Ritter, S. 384), der am Schluß der Vieta'schen Schrift „De numerosa potestatum ad Exegesin Resolutione“ (1600) abgedruckt ist. Ferner die Vorrede von Anderson zu den „De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo“ (vgl. S. 174, Anm. 110), ed. van Schooten, S. 83. — Vieta selbst sagt in der Einleitung zu seiner Schrift „Ad problema, quod . . . proposuit Adr. Romanus, Responsum“ (1595): „Ego qui me Mathematicum non profiteor, sed quem, si quando vacat, delectant Mathematices studia . . .“.

[79]) Sein jüngerer Zeitgenosse, der Historiker De Thou, dessen juristische und politische Laufbahn an die von Vieta erinnert, mit dem er auch die Vorliebe für mathematische Studien teilt, sagt von ihm: „In mathematicis . . . adeo excelluit, ut quicquid ab antiquis in eo genere inventum, et scriptis, quae temporis injuria aut perierunt aut obsoluerunt, proditum memoratur, ipse adsidua cogitatione invenerit et renovarit, et multa ex suo ad illorum ingeniosa reperta addiderit“ (Vieta, Opera mathematica, ed. van Schooten, 1646, p. *4).

dessen Entstehungszeit mit der von Keplers „Mysterium cosmographicum" (1596) zusammenfällt, hatte die Aufgabe, im Geiste des Ptolemaios dessen Μαθηματικὴ σύνταξις zu erneuern. Die Kopernikanische Hypothese verwarf Vieta, weil sie nach seiner Meinung auf schlechter Mathematik beruhte[80][81]. Ebenso ist er in seinen übrigen mathemati-

[80] Vgl. Ritter, S. 241; 269. — Über die Stellung Vieta's zu Kopernikus vgl. insbesondere den „Apollonius Gallus", Appendicula II (ed. van Schooten, S. 343; Erstausgabe 1600, S. 11r). Hier wird auch auf ein Werk verwiesen, das die Fehler bei Kopernikus korrigieren und die Lücken bei Ptolemaios ausfüllen sollte. Es sollte den Namen „Francelinis" führen und u. a. eine Schrift „Epilogistice motuum coelestium Pruteniana" enthalten: „Sed ea supplebimus omissa et emendabimus commissa in Francelinide, in qua etiam ex⟨h⟩ibebimus Epilogisticen motuum coelestium Prutenianam per hypotheses, quas vocant Apollonianas, si minus placent Ptolemaicae a motu in alieno centro et hypocentris seu ἐπικύκλων προσνεύσεσι liberatae". („Pruteniana" heißt „preußisch" von Prut(h)enia: Anspielung auf Kopernikus und die erstmalig 1551 erschienenen, sich die kopernikanische Hypothese zu eigen machenden „Prutenicae Tabulae coelestium motuum" von Erasmus Reinhold bzw. Reynoldus.) In der Verleger-Vorrede zur Edition Van Schooten von 1646 wird auch neben dem „Harmonicum coeleste" ein „Fragment" erwähnt, das dem gleichen Thema gewidmet ist („fragmentumque eodem spectans"). Vgl. auch den Titel einer daselbst genannten Arbeit von Anderson: Πρόχειρον ad triangulorum sphaericorum epilogismum". (Das „Harmonicum coeleste" war übrigens noch 1600 nicht ganz abgeschlossen, wie aus dem Brief von Marino Ghetaldi an Coignet hervorgeht (vgl. S. 155, Anm. 78).

[81] Richtunggebend müssen für Vieta die Worte des Ptolemaios im Prooemium der Syntaxis (Heiberg I¹, 5—7) gewesen sein, die wir hier wiedergeben wollen, weil sie am deutlichsten zeigen, daß das Ideal der „sicheren" und „exakten" Erkenntnis keineswegs das Charakteristikum der Neuen Wissenschaft ist. Nicht in der Rolle der Mathematik, sondern in der Art der Mathematik scheidet sich die moderne von der antiken Kosmologie. Dabei ist die „neue" Art der Mathematik selbst durch das veränderte ontologische Weltverständnis bedingt, was sich unmittelbar in der Ausdehnung ihres „Anwendungsbereichs" auf alle „Natur" dokumentiert. — Von den drei γένη des „theoretischen" Teils der Philosophie (vgl. Aristoteles, Metaph. E 1), sagt Ptolemaios (mit stoischer Umdeutung der peripatetischen Lehre), hätten die „Theologie", die Wissenschaft von der aller Sinnlichkeit und aller Wandelbarkeit enthobenen „äußersten" (ἄνω που περὶ τὰ μετεωρότατα τοῦ κόσμου) Ursache der Urbewegung, und die „Physik", die Wissenschaft von den materiellen „Qualitäten" der unbeständigen Dinge innerhalb der sublunaren Sphäre, mehr mutmaßlichen („ab-bildlichen" → „imaginativen" → „konjekturalen") Charakter (εἰκασία); nur die „Mathematik", die Wissenschaft vom σχῆμα (→ figura), von der ποσότης (→ quantitas, numerus), der πηλικότης (→ magnitudo), dem τόπος (→ locus → spatium), dem χρόνος (→ tempus), die allem Seienden schlechthin (πᾶσιν ἁπλῶς τοῖς οὖσι) zukämen (vgl. Descartes, Meditationes, Meditatio prima: „... quaedam adhuc magis simplicia et universalia vera esse fatendum est ... Cuius generis esse videntur ... figura rerum extensarum; item quantitas, sive earumdem magnitudo et numerus; item locus in quo existant, tempusque per quod durent, et similia" — Adam-Tannery VII, 20, und andererseits Aristoteles, De anima B 6, 418 a 16—19 und Γ 1, 425 a 15 f., auch 425 b 5 f.; ferner De sensu 1, 437 a 8 f. [vgl. weiter unten S. 224, Anm. 196]), stelle ein sicheres und unumstößliches Wissen dar; deshalb wolle er, Ptolemaios, sich dieser letzteren widmen,

schen Schriften stets darauf bedacht, nicht nur die von ihm gebrauchten Termini entweder der antiken Terminologie direkt zu entlehnen oder doch, soweit sie von ihm neu erfunden werden, dieser möglichst anzupassen, sondern auch alle eingeführten „Neuerungen" als eine bloße Ausgestaltung der Überlieferung zu deuten. Alle „Neuerung" ist ihm — wie so vielen seiner Zeitgenossen — „Erneuerung", Renovatio, Restitutio. In der Epistola an Katharina von Parthenay, die der „Isagoge" vorangestellt ist, sagt er bezeichnenderweise: „quae nova sunt solent a principio proponi rudia et informia, succedentibus deinde seculis expolienda et perficienda. Ecce ars quam profero nova est, aut demum ita vetusta, et a barbaris defaedata et conspurcata, ut novam omnino formam ei inducere, et ablegatis omnibus suis pseudo-categorematis, ne quid suae spurcitiei retineret, et veternum redoleret, excogitare necesse habuerim et emittere nova vocabula ...". Dementsprechend wird in der Ausgabe von 1591 die „Isagoge" als Teilstück des „Opus restitutae Mathematicae Analyseos" oder der „Algebra nova" bezeichnet[82]). Zu den „barbarischen" pseudo-categoremata gehören für Vieta offensichtlich auch die Ausdrücke „Algebra" bzw. „Algebra et Almucabala" selbst, worin ihm übrigens später Descartes folgt, wenn er in den „Regulae" von jener „ars" spricht, „quam barbaro nomine Algebram vocant" (Adam-

und zwar insbesondere ihrem astronomischen Teil, der den ewigen, unveränderlichen Wandel der sich stets gleichbleibenden göttlichen Himmelskörper zum Gegenstande habe, — welcher Gegenstand ja dem Charakter der „Wissenschaft", des sich stets gleichbleibenden, nicht nach Meinungen schwankenden Wissens, angemessen sei. (Heiberg I[1], 6, 11—7, 4: „... διανοηθέντες, ὅτι τὰ μὲν ἄλλα δύο γένη τοῦ θεωρητικοῦ μᾶλλον ἄν τις εἰκασίαν ἢ κατάληψιν ἐπιστημονικὴν εἴποι, τὸ μὲν θεολογικὸν διὰ τὸ παντελῶς ἀφανὲς αὐτοῦ καὶ ἀνεπίληπτον, τὸ δὲ φυσικὸν διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄστατον καὶ ἄδηλον, ὡς διὰ τοῦτο μηδέποτε ἂν ἐλπίσαι περὶ αὐτῶν ὁμονοῆσαι τοὺς φιλοσοφοῦντας, μόνον δὲ τὸ μαθηματικόν, εἴ τις ἐξεταστικῶς αὐτῷ προσέρχοιτο, βεβαίαν καὶ ἀμετάπιστον τοῖς μεταχειριζομένοις τὴν εἴδησιν παράσχοι ὡς ἂν τῆς ἀποδείξεως δι' ἀναμφισβητήτων ὁδῶν γιγνομένης, ἀριθμητικῆς τε καὶ γεωμετρίας, προήχθημεν ἐπιμεληθῆναι μάλιστα πάσης μὲν κατὰ δύναμιν τῆς τοιαύτης θεωρίας, ἐξαιρέτως δὲ τῆς περὶ τὰ θεῖα καὶ οὐράνια κατανοουμένης, ὡς μόνης ταύτης περὶ τὴν τῶν αἰεὶ καὶ ὡσαύτως ἐχόντων ἐπίσκεψιν ἀναστρεφομένης διὰ τοῦτό τε δυνατῆς οὔσης καὶ αὐτῆς περὶ μὲν τὴν οἰκείαν κατάληψιν οὔτε ἄδηλον οὔτε ἄτακτον οὖσαν αἰεὶ καὶ ὡσαύτως ἔχειν, ὅπερ ἐστὶν ἴδιον ἐπιστήμης, πρὸς δὲ τὰς ἄλλας οὐχ ἧττον αὐτῶν ἐκείνων συνεργεῖν". — Vgl. Teil I, S. 23 f.)

[82]) Unter dem gleichen allgemeinen Titel werden hier weitere 9 Schriften angekündigt, von denen nur das „Supplementum geometriae" (1593) und „De numerosa potestatum ad Exegesin Resolutione" (1600) in dieser Form erschienen sind. (Bei den „Zeteticorum libri quinque" (1593) habe ich den Nebentitel nicht feststellen können.) — Bereits im „Liber inspectionum" sagt Vieta, Taf. 37, anläßlich der von ihm für die Berechnung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke neu angegebenen „Proportionen", deren Zusammenstellung öffne den Weg „ad reparandam et instaurandam pene collapsam nobilem scientiam".

Tannery X, 377)[83]). Über diese von Geheimnissen umwitterte und an die dunklen Künste der Alchymisten gemahnende „Ars magna“[84]) hinweg will Vieta als erster das „bisher unzugängliche“ „gediegene Gold“ (aurum fossile et probum) der antiken Mathematiker entdeckt haben, das diese eifersüchtig behüteten und dessen Besitz ihn, Vieta, nun in den Stand setzt, nicht bloß, wie das früher üblich war, „dieses oder jenes Problem“ einzeln zu lösen, sondern Probleme eben solcher Art in beliebiger Menge (decadas et eicadas) zu bewältigen. Die strenge und pedantisch-gelehrte Nüchternheit seines Denkens[85]) paart sich mit dem Bewußtsein der gewaltigen Macht, die diese seine Entdeckung dem Menschen verleiht und die er — den kommenden Jahrhunderten vorauseilend — am Schluß der „Isagoge“ durch die stolze Losung andeutet: „Nullum non problema solvere“.

## B. Vieta's Ansatz: der Begriff der synthetischen Apodeixis bei Pappus und bei Diophant.

Um das für die Wissenschaft des 16. und 17. Jahrh. typische Verhältnis Vieta's zur Antike besser zu verstehen, wenden wir uns seiner Darstellung in der „Isagoge“ selbst zu. — Gleich das erste Kapitel zeigt die beiden griechischen Hauptquellen auf, aus denen Vieta's Werk gespeist wird: 1. Pappus' 7. Buch, das ja auch weiterhin eine so bedeutende Rolle in der Entwicklung der modernen Mathematik zu spielen berufen war[86]), und 2. Diophant's „Arithmetik“[87]). Es gibt,

[83]) In der Einleitung zu seiner Schrift „Ad problema, quod . . . proposuit Adr. Romanus, Responsum“ (1595) sagt Vieta: „Neque vero placet barbarum idioma, id est, Algebricum“.

[84]) Bereits Luca Pacioli spricht in seiner „Summa“ (1494) von der Algebra als von der „Arte maggiore“ (vgl. Cantor II², 321). Ihm folgend nennt Cardan sein Werk: Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus (1545); Peletier: De occulta parte numerorum, quam Algebram vocant (1560); Bombelli: L'Algebra, parte maggiore dell' Aritmetica (1572); Gosselin: De arte magna seu de occulta parte numerorum, quae et Algebra et Almucabala vulgo dicitur (1577). — Der arabische Ausdruck „Almucabala“ wurde mit „liber de rebus occultis“ übersetzt (so noch Laz. Schoner in: Petri Rami Arithmetices libri duo, et Algebrae totidem: a Lazaro Schonero emendati et explicati, etc., Frankfurt 1586, p. 322). Vgl. auch Descartes, Regulae ad directionem ingenii, Reg. IX, Ad.-Tann. X, 402: „unumque est quod omnium maxime hic monendum mihi videtur, nempe ut quisque firmiter sibi persuadeat, non ex magnis et obscuris rebus, sed ex facilibus tantum et magis obviis, scientias quantumlibet occultas esse deducendas“.

[85]) „. . . mihi pauca admiranti . . .“ sagt er von sich selbst in eben derselben epistola dedicatoria.

[86]) Die lateinische Ausgabe des Pappus von Commandino erschien 1588/89 (vgl. Hultsch I, S. XVII), zweifellos aber waren Vieta bereits früher Pappus-Manuskripte zugänglich. — Übrigens stellt auch der „Apollonius Gallus“ eine „Restitution“ der Schrift des Apollonius Περὶ ἐπαφῶν dar, von der Pappus in eben demselben 7. Buche spricht (Hultsch II, S. 636, 21; 644, 23 ff.; 820—852).

[87]) vgl. Descartes, Regulae, Ad.-Tann. X, 376: „Et quidem huius verae Matheseos vestigia quaedam adhuc apparere mihi videntur in Pappo et Diophanto . . .“.

sagt Vieta, in der Mathematik ein besonderes Verfahren, um die Wahrheit zu ermitteln (veritatis inquirendae via quaedam), das — wie man behaupte — Plato als erster gefunden habe[88]. Theon (von Alexandrien) habe diesem Verfahren den Namen „Analysis" gegeben und es genau definiert, nämlich als „adsumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum". Wie er auch umgekehrt (ut contra) die „Synthesis" definiert habe als „adsumptio concessi per consequentia ad quaesiti finem et comprehensionem". Diese hier dem Theon zugeschriebenen Definitionen[89]) finden sich auch bei Pappus, und zwar in modifizierter und verdeutlichter Form, am Anfang seines 7. Buches (Hultsch II, S. 634, 11 ff.)[90]. Im Euklid-Scholion[89]) wird im Hinblick

[88]) Proklus in Eucl., 211, 19—22 (vgl. Diog. Laert. III, 24). [S. auch unten Anm. 90].

[89]) In einem Scholion zu Euklid XIII, 1—5 (Heiberg-Menge IV, 364 f.) heißt es: Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. Im 16. Jahrh. war die — gelegentlich auch früher bereits geäußerte (vgl. Cantor II², 102) — Meinung weit verbreitet, daß die Theonische Redaktion der Euklidischen „Elemente" eine völlige Umarbeitung der ursprünglichen Vorlage darstelle. Man nahm sogar an, daß die Beweise der Sätze durchweg nicht etwa von Euklid, sondern von Theon stammten. Ähnlich dachten Xylander, Petrus Ramus (und sein Kreis — vgl. Cantor II², 549, s. auch weiter unten S. 164, Anm. 97 und S. 171, Anm. 104), Candalla (François de Foix-Candalle), der bedeutendste der damaligen Herausgeber und Neubearbeiter Euklids, u. s. f. (vgl. Heiberg, Litt.-gesch. Stud. üb. Eukl., S. 175 u. 168). (Die beiden letzteren, ebenso wie Forcadel, Peletier, Gosselin — und wohl auch Bressieu — lernte Vieta in Paris persönlich kennen — vgl. Ritter, S. 245; ferner Waddington, Ramus, Sa vie, ses écrits et ses opinions, 1855, S. 109, 156 und 353.) Es lag deshalb für Vieta nahe, auch jenes Scholion dem Theon zuzuschreiben (s. auch S. 170, Anm. 104; ferner Nesselmann, a. a. O., S. 59; zu der modernen Diskussion über den Ursprung dieses Scholions vgl. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements², 1926, I 137 und III 442). — Die Bevorzugung Theons gegenüber Euklid entspricht der allgemeinen humanistischen Tendenz, auf Grund einer „besseren" Kenntnis der Alten den von der Schule anerkannten Autoritäten ihre autoritative Stellung zu nehmen. (In Bezug auf Theon bilden hier eine Ausnahme Johannes Buteo und charakteristischerweise Clavius — vgl. Cantor II², 563 und 556.)

[90]) Bei Pappus heißt es: ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ἐπί τι ὁμολογούμενον συνθέσει ... ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ ἑπόμενα τὰ ἐκεῖ προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. — Vgl. übrigens zu den Begriffen des ζητούμενον und des ὁμολογούμενον Plato, Menon 79 D, wo sie wahrscheinlich mit Rücksicht auf den allgemeinen „geometrischen" Hintergrund des Dialogs verwandt werden. Die Behauptung, Plato sei der Erfinder der „analytischen" Methode (vgl. oben Anm. 88), verliert ihre Befremdlichkeit, wenn man sie auf den ursprünglichen Lehr- und Lern-Zusammenhang platonischer Philosophie zurückbezieht. Das sokratische Frage- und Antwort-Spiel in den platonischen Dialogen steht in einem bestimmten Gegensatz zur „mathematischen" — von Definitionen, Axiomen und Postulaten aus-

auf die fünf ersten Sätze des 13. Buches gezeigt, wie sich die „Synthesis" jedesmal unmittelbar aus der vorhergehenden „Analysis" durch Umkehrung ergibt (beides ἄνευ καταγραφῆς — „ohne Zeichnung der Figur" — a. a. O., S. 366, 4; 368, 16). Und Pappus, der das genannte Verfahren mit Rücksicht auf den sog. ἀναλυόμενος τόπος erwähnt, hebt mit Nachdruck dieses Verhältnis der Umkehrung hervor. Je nachdem nun, ob die „Analysis" der Auffindung eines auf ein „Theorem" bezüglichen Beweises oder einer auf ein „Problem" bezüglichen Lösung („Konstruktion") gilt, unterscheidet Pappus zwei Arten, zwei γένη der Analysis: τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν, τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προταθέντος, ὃ καλεῖται προβληματικόν (Hultsch II, S. 634, 24—26). Im ersten Falle stellt also die Umkehrung der Analysis, die „Synthesis", unmittelbar eine ἀπόδειξις dar, im zweiten Falle zunächst eine κατασκευή (geometrische Konstruktion) oder auch einen πορισμός (Hultsch II, S. 650, 16ff. — vgl. Teil I, S. 50, Anm. 2), worauf dann die ἀπόδειξις folgt[91]). Bei der Erläuterung des Unterschiedes zwischen der „theoretischen" und der „problematischen" Analysis nennt Pappus aber beide Male die Synthesis einfach „ἀπόδειξις" (636, 5f.: καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει — 636, 12f.: καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει). — Ebenso wird — was für die Vieta'sche Terminologie offenbar entscheidend geworden ist — bei Diophant die Umkehrung der jeweiligen Auflösung, nämlich die „Probe", die zeigen soll, daß die gefundenen Anzahlen die Bedingungen der gestellten Aufgabe in der Tat erfüllen (ποιοῦσι τὸ πρόβλημα), ἀπόδειξις genannt („καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά" heißt es am Schlusse einer

gehenden — Methode. Die „Reinheit" dieses mathematisch-synthetischen Verfahrens kommt der Dialektik nicht zu (vgl. Theaet. 196 E: ... πάλαι ἐσμὲν ἀνάπλεῳ τοῦ μὴ καθαρῶς διαλέγεσθαι — dazu Menon 75 C—D und 79 D). Die Dialektik geht vielmehr stets von Ansichten (δόξαι) aus, die das „Gesuchte" als „bekannt" voraussetzen, um auf dem Wege der Widerlegung dieser Ansichten als „falscher Ansichten" (ψευδεῖς δόξαι) zu der in der Seele schlummernden „richtigen Ansicht" (ἀληθὴς oder ὀρθὴ δόξα) vorzudringen, die nun erst durch eine genaue Begründung (den λογισμὸς αἰτίας) zur Einsicht (ἐπιστήμη) gefestigt werden muß (vgl. Menon 98 A). Auf diesem Wege zur Wahrheit — dem eigentlich sokratischen Wege der „Erinnerung", der ἀνάμνησις, von dem gerade im „Menon" die Rede ist, — wird also immer schon von dem Wort, das das Unbekannte und Gesuchte (ζητούμενον) bezeichnet, in der Weise Gebrauch gemacht, als ob das Bezeichnete ein bereits Bekanntes und Zugestandenes (ὁμολογούμενον) wäre. Eben darin wurzelt die „analytische" Kraft des sokratischen Gesprächs (Theaet. 196 E—197 A: ΘΕΑΙ. Ἀλλὰ τίνα τρόπον διαλέξει, ὦ Σώκρατες, τούτων ἀπεχόμενος; ΣΩ. Οὐδένα ὤν γε ὃς εἰμί ... — vgl. dazu auch Menon 98 B). — Vgl. auch Tannery, La géométrie grecque, S. 112f., wo bezüglich der „analytischen" Methode auf das Ende des 6. Buches der Politeia verwiesen wird. Der dialektische Aufstieg zum ἀνυπόθετον würde in dem von uns dargelegten Sinne in der Tat als „analytisch" zu kennzeichnen sein, wobei freilich die letzten Schritte über den Bereich des λόγος hinausführen (vgl. Teil I, S. 79; 90ff.).

[91]) vgl. dazu Tannery, Mém. scient. III 162ff.; Hankel, a. a. O., S. 144.

ganzen Reihe seiner Aufgaben — vgl. 2. Bd. der Tannery-Ausgabe, Index v. ἀπόδειξις)[92]. Andererseits besteht ja das Diophantische Verfahren gerade darin, mit dem quaesitum, nämlich der jeweils gesuchten Anzahl, wie mit einem bereits Gegebenen, „Zugestandenen" (concessum) zu operieren. Die Aufstellung einer Gleichung bedeutet gar nichts anderes, als daß die Bedingungen der betreffenden Aufgabe in eine Form gebracht werden, die auf die „Bekanntheit" oder „Unbekanntheit" der in der Aufgabe vorkommenden Größen keine Rücksicht nimmt. Die aus dieser Gleichung zu ziehenden Folgerungen (consequentia), d. h. ihre schrittweise Umformung zu einer kanonischen Gestalt[93]) (zu ihrer Normalform, wie wir heute sagen), führen schließlich — durch Berechnung — zur Auffindung der gesuchten Anzahl, zur „richtigen" Anzahl also, die damit erst endgültig „zugestanden" ist (verum concessum). Ergibt sich bei der Schlußberechung eine „unmögliche" Anzahl (vgl. oben S. 143), so war eben die Aufgabe falsch gestellt, d. h. selbst „unmöglich" (Pappus, a. a. O., S. 636, 13f.: ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα). Sie bedarf dann eines διορισμός, einer, wie es bei Pappus (636, 15f.) heißt, προδιαστολὴ τοῦ πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται [καὶ] τὸ πρόβλημα, die bei Diophant als προσδιορισμός bezeichnet wird (vgl. oben S. 141; 143)[94]).

Der Ausgangspunkt der „Erneuerung" Vieta's ist also das Zusammensehen dieser von Pappus allein im Hinblick auf geometrische Theoreme und Probleme (bei Euklid, Apollonius und Aristaios) geschilderten Sachverhalte mit dem Verfahren der Diophantischen „Arithmetik". Auf Grund der Darlegungen bei Pappus nennt Vieta dieses Verfahren „Analysis", „ars analytice". Er ist sich des rein geometrischen Charakters der von Pappus gemeinten Analysis durchaus bewußt. In der Appendicula I zum „Apollonius Gallus" (ed. van Schooten, S. 339 ff.) gibt er angesichts einiger Probleme, die Regiomontanus[95]) zwar „algebrice, ut loquitur", nicht

[92]) Ammonius, in Arist. Anal. prior. I, Prooemium (Wallies 5, 27—31) zitiert die Definition der ἀνάλυσις durch Geminos: ἀνάλυσίς ἐστιν ἀποδείξεως εὕρεσις. Das kann sowohl von der „theoretischen" wie von der „problematischen" Analysis gelten. Auch Marinus gibt diese Definition wieder: „. . . ἀποδείξεώς ἐστιν εὕρεσις ἡ ἀνάλυσις" (in Eucl. Data, Heiberg-Menge VI, 252—254, abgedr. in der Pappus-Ausgabe von Hultsch III, S. 1275). Hier ist auch zu lesen: „. . . μεῖζόν ἐστι τὸ δύναμιν ἀναλυτικὴν κτήσασθαι τοῦ πολλὰς ἀποδείξεις τῶν ἐπὶ μέρους ἔχειν". Vgl. ferner Heron, Metrik (Schöne), S. 16, 12—14: „. . . ἑξῆς δὲ κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα" (dazu Tannery, Mém. scient. III 146 f.).

[93]) Der Ausdruck „kanonisch" für eine bestimmte Gestalt einer Gleichung stammt erst von Th. Harriot (vgl. Cantor $II^2$, 791; s. weiter unten S. 190 ff., Anm. 145).

[94]) Bei Vieta übrigens mit dem juristischen Terminus „cautio".

[95]) De triangulis omnimodis libri quinque, 1533. Vgl. II, 12 (p. 51): „Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hactenus, sed per artem rei et census id efficere conabimur" (vgl. auch II, 23 — p. 56).

aber geometrisch zu lösen vermag, deren geometrische Konstruktion an und bemerkt einleitend, um darzutun, daß es auch auf diese geometrischen Konstruktionen ankomme: „At Algebra, quam tradidere Theon, Apollonius, Pappus et alii veteres Analystae, omnino Geometrica est, et magnitudines, de quibus quaeritur, sive re [d. i. in anschaulicher Konstruktion], sive numero statim exhibet, aut erit ἄρρητον ἢ ἄλογον [was hier einfach ἀδύνατον heißen soll[96]] πρόβλημα". Er ist eben der Meinung, daß das geometrische Versagen Regiomontans in diesem Falle darauf beruht, daß er die echte „Algebra" gar nicht gekannt habe. Am Ende seiner Schrift „Ad Problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, Responsum" (1595) stellt er von sich aus eine Aufgabe, die er dem 7. Buche des Pappus entnimmt und deren Lösung dann der „Apollonius Gallus" gibt (vgl. S. 158, Anm. 86), und bemerkt abschließend: „Sed quae problemata Algebrice absolvit Regiomontanus, is se non posse aliquando[95]) Geometrice construere fatetur. An non ideo quia Algebra fuit hactenus tractata impure? Novam amplectimini φιλομαθεῖς, valete, et aequi bonique consulite" (van Schooten, S. 324). Diese „neue" und „gereinigte" Algebra, die die „ars analytice" darstellt, ist also für Vieta ebensowohl „geometrisch" als „arithmetisch". So vermutet er nicht nur hinter der geometrischen Analysis der Alten, sondern auch — wie wir sehen werden — hinter der Diophantischen „Arithmetik" ein allgemeineres Verfahren, das sich nicht bloß auf Figuren und Anzahlen beschränkt, wenngleich für Vieta ihr letztes Ziel freilich in der Auffindung von geometrischen Konstruktionen und von Anzahlen besteht, und zwar im letzteren Falle von „möglichen" Anzahlen, d. h. — gemäß dem angeführten Zitat aus dem „Apollonius Gallus" — von solchen, die sich unmittelbar geometrisch deuten lassen.

Dieser Vieta'schen Konzeption einer „reinen", auf geometrische Größen und Anzahlen gleicherweise beziehbaren, „allgemeinen" Algebra kommt die überlieferte allgemeine Proportionenlehre des Eudoxos, wie sie im 5. Buche Euklids vorliegt, entgegen. Bereits für Aristoteles bildete — neben den κοιναὶ ἔννοιαι — die Eudoxische Proportionenlehre das klassische Beispiel einer auf „Allgemeines" gehenden und an keinen spezifischen Gegenstandsbereich gebundenen Disziplin. Metaphysik E 1, 1026a 25—27: „. . . ἐν ταῖς μαθηματικαῖς . . . ἡ μὲν γεωμετρία καὶ ἀστρολογία περί τινα φύσιν εἰσίν, ἡ δὲ καθόλου πασῶν κοινή". Anal. post. A 5, 74a 17—25: „. . .

[96]) vgl. zu diesem Sprachgebrauch das 1. Kapitel des „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber octavus", wo Vieta unter Berufung auf Plutarch, Vita Marcelli, Cap. 14, das traditionelle Problem der Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen, d. h. der Würfelverdoppelung, ein Problema ἄλογον (und auch ἄρρητον) nennt, „non quod numeris explicari non possit, ut γραμμαὶ ἄλογοι dicuntur, sed cujus fabrica non ratione, sed instrumento constituatur".

καὶ τὸ ἀνάλογον ὅτι ἐναλλάξ [vgl. Euklid V, Def. 12 und Prop. 16], ἢ ἀριθμοὶ καὶ ἢ γραμμαὶ καὶ ἢ στερεὰ καὶ ἢ χρόνοι [letzteres in Bezug auf die ἀστρολογία — vgl. das vorige Zitat und Met. M 2, 1077 a 1—4; 12], ὥσπερ ἐδείκνυτό ποτε χωρίς, ἐνδεχόμενόν γε κατὰ πάντων μιᾷ ἀποδείξει δειχθῆναι· ἀλλὰ διὰ τὸ μὴ εἶναι ὠνομασμένον τι πάντα ταῦτα ἕν, ἀριθμοί μήκη χρόνος στερεά, καὶ εἴδει διαφέρειν ἀλλήλων, χωρὶς ἐλαμβάνετο. νῦν δὲ [nach dem Vorbild des Eudoxos] καθόλου δείκνυται· οὐ γὰρ ᾗ γραμμαὶ ἢ ᾗ ἀριθμοὶ ὑπῆρχεν, ἀλλ' ᾗ τοδί, ὃ καθόλου ὑποτίθενται ὑπάρχειν" (vgl. weiter unten S. 166). Ebenso spricht Proklus (in Eucl., S. 7 ff.; 18 ff.) von der μία ἐπιστήμη, die alle mathematischen Erkenntnisse ins eins zusammenfasse, und von deren Theoremen (τὰ κοινὰ θεωρήματα), die zwar ἐν ἀριθμοῖς καὶ ἐν μεγέθεσι καὶ ἐν κινήσεσι betrachtet werden könnten, aber weder mit arithmetischen, noch mit geometrischen, noch mit astronomischen Theoremen identisch seien. Dazu gehörten vor allem die Sätze der Verhältnis- und Proportionenlehre (7, 22—27 — vgl. dazu Euklid V, Def. 14, 15, 16, 12, Prop. 17, 18, 19 [Coroll.], 16 und Nikomachos I, 17—II, 4; II, 21—29 — s. Teil I, S. 36 f.): „τά τε τῶν ἀναλογιῶν καὶ τὰ τῶν συνθέσεων καὶ διαιρέσεων καὶ τῶν ἀναστροφῶν καὶ ἐναλλαγῶν, ἔτι δὲ τὰ τῶν λόγων πάντων οἷον πολλαπλασίων καὶ ἐπιμορίων καὶ ἐπιμερῶν καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων καὶ ἁπλῶς τὰ περὶ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον καθόλου θεωρούμενα καὶ κοινῶς", d. h. nicht sofern sie an Figuren oder an Anzahlen oder an (Gestirn-) Bewegungen (ἐν σχήμασιν ἢ ἀριθμοῖς ἢ κινήσεσιν) haften, sondern sofern hier überall eine „gewisse gemeinsame Natur" (φύσις τις κοινή) als solche (αὐτὸ καθ' αὑτό) erfaßt wird. In eben diesem Zusammenhang erwähnt Proklus auch das allen mathematischen Disziplinen gemeinsame Verfahren der „Analysis" und „Synthesis": ἡ ἀπὸ τῶν γνωριμωτέρων ὁδὸς ἐπὶ τὰ ζητούμενα καὶ ἡ ἐκ τούτων ἐπ' ἐκεῖνα μετάβασις, ἃς καλοῦσιν ἀναλύσεις καὶ συνθέσεις (8, 5—8). — Von dieser Überlieferung aus versteht Vieta in der „Isagoge" (Schluß des 2. Kapitels) jede „Gleichung" (aequalitas) als „Auflösung einer Proportion" (resolutio proportionis) und entsprechend jede Proportion als „Aufstellung einer Gleichung" (constitutio aequalitatis). Immer spricht er daher von „Gleichungen" und „Proportionen" zugleich, d. h. die „reine" Algebra ist ihm nicht nur eine „allgemeine Gleichungslehre", sondern zugleich auch eine „allgemeine Proportionenlehre"[97]). So verschmilzt ihm

[97]) Bereits Gosselin fügt 1577 in seinem algebraischen Werk (vgl. S. 158, Anm. 84) der alten „pythagoreischen" Einteilung der Mathematik in Geometrie und Astronomie, Arithmetik und Musik (vgl. Teil I, S. 36 und Proklus in Eucl., 35 f.) die „Algebra" hinzu, die er zusammen mit der „Musik" zum Bereich des „verhältnismäßigen" Wieviel rechnet: „Contempletur numeros secundum se Arithmeticus, numeros certe sub ratione ad aliud cognoscent Musicus, et **Algebraeus**" (p. 2r). Dies ist sozusagen die erste „offizielle" Einführung der Algebra in das von der Schule anerkannte System der Wissenschaften (vgl. S. 151 f.). Bis dahin war die „ars rei et

auch ein Teil der in Euklids Buch I der „Elemente" aufgezählten κοιναὶ ἔννοιαι mit einigen Definitionen bzw. Sätzen des „allgemeinen" Buches V, der geometrischen Bücher II und VI und der „arithmetischen" Bücher VII und VIII zu den „Symbola aequalitatum et proportionum" (Kap. II)[98]),

census" eine mehr oder weniger dunkle Kuriosität (vgl. S. 158). Sie schien sich sogar zu öffentlichen Vorführungen — in Gestalt von Wettkämpfen — zu eignen und wurde von der Menge nicht weniger als etwa akrobatische oder Zauberkunststücke bestaunt: so fand noch 1548 in Mailand jener turbulente öffentliche Wettkampf zwischen Tartaglia und Ferrari, dem Schüler Cardans, statt (vgl. Cantor II², 494), der sich an den Streit um die Auflösung kubischer Gleichungen anschloß. (Die Tradition der Wettkämpfe, freilich nicht mehr in Form von Schaustellungen, setzen noch Vieta und Adr. Romanus, ja sogar noch Descartes und Stampioen [vgl. Descartes, Oeuvres, Adam-Tannery XII, 272 ff.] fort. Zu Beginn des 17. Jahrh. ist die „Algebra" geradezu „Mode" und wird mit Vorliebe auch in der guten Gesellschaft getrieben [vgl. G. Cohen, Écrivains français en Hollande dans la première moitié du XVIIe siècle, Paris 1920, S. 378].) Es ist vor allem dem Wirken von Petrus Ramus zu verdanken — zu dessen Kreis auch Gosselin gehört —, daß die Algebra Eingang in die offizielle Wissenschaft finden konnte, wie Ramus sich ja überhaupt für die Mathematik als vorbildliche Wissenschaft einsetzte, mochte er selbst auch nicht gerade ein besonderes Verständnis für sie besitzen (vgl. S. 154, Anm. 73; S. 159, Anm. 89; S. 171, Anm. 104; S. 172, Anm. 106; S. 175, Anm. 112; S. 180, Anm. 122; S. 189, Anm. 140). Er war insbesondere der Gründer eines Lehrstuhls für Mathematik am Collège royal, den später u. a. auch Roberval (von 1634 bis 1675) innehatte (vgl. Waddington, a. a. O., S. 188 u. 326 ff.; ferner auch S. 108 ff.). Ramus ließ übrigens selbst 1560 eine Algebra erscheinen (anonym, Paris, bei Andr. Wéchel), die 1586 von Lazarus Schoner neu herausgegeben wurde (vgl. S. 158, Anm. 84) und auch weiterhin eine Reihe von Neuauflagen erlebte.

In dem genannten Werk sagt Gosselin ferner (p. 3r): „Huius scientiae [sc. Algebrae] ... tota ratio in proportione occupata est", wobei er merkwürdigerweise das Fundament dieser Wissenschaft in Euklid IX, 8 erblickt. (Über Gosselin, der Tartaglia ins Französische übersetzt: L'arithmetique de Nicolas Tartaglia Brescian, grand mathematicien, et prince des praticiens etc., 1. Aufl. 1578, 2. Aufl. 1613, und damit sehr zur Verbreitung der algebraischen Technik beiträgt, vgl. H. Bosmans, Le „De arte magna" de Guillaume Gosselin, Bibl. math., 3. Folge, Bd. VII, S. 44—66.)

Vgl. auch die Bestimmung Vieta's, Isagoge, Cap. VIII, § 2: „Aequatio est magnitudinis incertae cum certa comparatio", ferner oben S. 154.

[98]) Symb. 2 = Euklid I, Κοιν. Ἐνν. 1
„ 3 = „ „ 2
„ 4 = „ „ 3
„ 7 = „ V, Def. 13, 12, Prop. 16
„ 10 = „ VI, 23; VIII, 5
„ 13 = „ II, 1
„ 15, 16 = „ VI, 16 und 17; VII, 19 (bezeichnenderweise nicht im 5 Buch!)

Symb. 5 ist vorgebildet in Euklid I, Κοιν. Ἐνν. 5
„ 6 „ „ „ „ „ 6
„ 8 „ „ „ „ V, 12
„ 9 „ „ „ „ V, 19
„ 12 „ „ „ „ VII, 17
„ 14 „ „ „ „ VII, 16.

die als die allgemeinen und festen Grundlagen (firmamenta) der zu den Gleichungen und Proportionen führenden „Schlüsse" zu gelten haben (quibus aequalitates et proportiones concluduntur — Kap. I)[98a]).

In alledem erweist sich Vieta in der Tat als treuer Bewahrer und Deuter des überlieferten Lehrgutes. Aber der entscheidende Unterschied gegenüber der antiken καθόλου πραγματεία zeigt sich bei ihm in der Auffassung, die er von deren Gegenstand hat. Auch in dieser Hinsicht knüpft Vieta freilich unmittelbar an die Überlieferung an. Seine Auffassung wird 1. durch den Vergleich nahegelegt, der zwischen der Rolle der „Analysis" in der Geometrie einerseits und in der Diophantischen „Arithmetik" andererseits gezogen werden kann; sie findet 2. ihre stärkste Stütze in der Verwendung des εἶδος-Begriffs bei Diophant; und ist 3. weitgehend durch die Stellungnahme des Proklus zum

---

Symb. 1: „Totum suis partibus aequari" findet sich in der vielgelesenen Euklid-Ausgabe von Clavius als Axiom XIX — Ausgabe von 1589, Vol. I, p. 72. — Symb. 11 ist die Umkehrung von Symb. 10.

Die Aufzählung in Kap. II wird durch den Satz eingeleitet: „Symbola aequalitatum et proportionum notiora quae habentur in Elementis adsumit Analytice ut demonstrata, qualia sunt fere . . .". In Kap. I heißt es von den Symbola, sie seien „tam ex communibus derivanda notionibus, quam ordinandis vi ipsius Analyseos theorematis".

Unter „Symbolum" versteht Vieta wohl „vertragliche Festsetzung" entsprechend dem juristischen Begriff σύμβολον. Vielleicht liegt hier auch der Einfluß des theologischen Sprachgebrauchs vor. (Vgl. andererseits S. 183, Anm. 128).

[98a]) Die Bedeutung des Proportions-Begriffs und der Proportionen-Lehre für die Entstehung der modernen Wissenschaft kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden. Seit Thomas Bradwardinus (1. Hälfte des 14. Jahrh.) und Albert von Sachsen (2. Hälfte des 14. Jahrh.) gibt es in dieser Hinsicht eine feste Schultradition, die — durch Vermittlung so verschiedener Geister wie Nicolaus von Cusa und Luca Pacioli — nach zwei (ursprünglich also zusammengehörigen und schließlich auch wieder zusammenlaufenden) Richtungen hin die Wissenschaft des 16. und des 17. Jahrh. entscheidend beeinflußt: die eine dieser Richtungen führt zur Algebra, wie eben die vorliegende Arbeit zu zeigen hat; die andere zur Begründung der modernen Physik und Astronomie. Sowohl Galilei in seiner Bewegungslehre als auch Kepler in seinen astronomischen Forschungen gehen — was meist übersehen wird — bestimmten „Proportionen" nach. Wenn Kepler hierbei unter dem unmittelbaren Einfluß antiker Wissenschaft, vor allem des platonischen „Timaios" und des Proklus, steht, wenn andererseits Galilei die Anregung zu seinen mathematisch-physikalischen Studien den „praktischen" Disziplinen der Statik, der Mechanik, der Hydraulik, der militärischen Architektur usw. verdankt und sich von diesen aus auf Euklid und Archimedes verwiesen sieht, so setzen sie doch beide — wenn eben auch in verschiedener Hinsicht und mit divergierender Tendenz — die pythagoreisch-platonische Tradition fort. Wie für Descartes (Prinzipien III, 47) ist die Leitidee ihrer Forschungen durch die Worte: „proportio vel ordo" gekennzeichnet. Nur daß diese Worte in ihrem Munde eine sehr gewandelte Bedeutung besitzen gegenüber den entsprechenden griechischen: ἀναλογία und τάξις. — Die Darstellung dieses ganzen Zusammenhanges bleibt einer weiteren Arbeit vorbehalten.

Problem der allgemeinen Proportionenlehre beeinflußt. Dennoch läßt sie sich zureichend nur aus der fundamentalen Umdeutung verstehen, die die antike Begrifflichkeit überhaupt in der modernen Mathematik erfährt und die in dem gewandelten „Anzahl"-Verständnis zu ihrem bezeichnendsten Ausdruck gelangt.

### C. Die Umdeutung des Diophantischen Verfahrens durch Vieta.

#### 1. Das Verfahren ἐν τῷ ἀορίστῳ als das Analogon zur geometrischen Analysis.

Aus dem Bestehen einer „allgemeinen" Lehre folgt für die antike Wissenschaft keineswegs ohne weiteres das Bestehen eines „allgemeinen Gegenstandes". So sagt Aristoteles (Metaph. M 3, 1077 b 17—20): „auch die allgemeinen mathematischen Sätze" — nämlich die „Axiome" (die κοιναὶ ἔννοιαι)[99]), aber auch alle Sätze der Eudoxischen Proportionenlehre — „gehen nicht auf Gebilde, die außerhalb und neben den [geometrischen] Größen und den Anzahlen Bestand hätten, sondern auf eben diese, freilich nicht sofern sie von dieser ihrer besonderen Beschaffenheit sind, nämlich: Größe haben oder [in diskrete Einheiten] aufgeteilt werden können" (. . . καὶ τὰ καθόλου ἐν τοῖς μαθήμασιν οὐ περὶ κεχωρισμένων ἐστὶ παρὰ τὰ μεγέθη καὶ τοὺς ἀριθμούς, ἀλλὰ περὶ τούτων μέν, οὐχ ᾗ δὲ τοιαῦτα οἷα ἔχειν μέγεθος ἢ εἶναι διαιρετά . . .). Daß es keinen spezifischen mathematischen Gegenstand geben kann, der weder eine (bestimmte) „Anzahl" (von Monaden), noch (unaufteilbare geometrische) „Punkte", noch eine (beliebig aufteilbare geometrische) „Größe", noch ein (bestimmter) „Zeitabschnitt" wäre (οὔτε ἀριθμός ἐστιν οὔτε στιγμαὶ οὔτε μέγεθος οὔτε χρόνος — Metaph. M 2, 1077 a 12), ist dabei nicht etwa spezielle aristotelische Lehrmeinung; es ist vielmehr die allgemein zugestandene Prämisse der aristotelischen Argumentation (vgl. 1077 a 12 f.: εἰ δὲ τοῦτο ἀδύνατον . . ., ferner An. post. A 24, 85 a 31—b 3). Auch in der platonischen Tradition, wie sie sich zuletzt noch in Proklus Gehör verschafft, wird niemals der καθόλου πραγματεία ein besonderer mathematischer Gegenstand zugeordnet. Es wird hier allerdings versucht, die Möglichkeit jedes „Verhältnisses", jeder „Proportion", jeder „Harmonie" von einem κοινόν ursprünglicher Art aus zu verstehen (vgl. Teil I, S. 94), aber damit wird zugleich über den Bereich des eigentlich „Mathematischen" weit hinausgegriffen. — Diese grundsätzliche Auffassung von den Gegenständen der Mathematik macht sich auch insbesondere bei Diophant geltend, sofern er — wie wir gesehen haben (S. 140; 149) — in seiner Fragestellung und seinen Lösungen nur bestimmte

[99]) vgl. Metaph. K 4, 1061 b 17 ff. und Anal. post. A 10, 76 a 41; b 14 u. 20 f.

Anzahlen von Monaden kennt. Aber eben hierdurch erfährt nun in der „Arithmetik" Diophants das in der Geometrie übliche Verhältnis zwischen der („problematischen") Analysis und der Synthesis eine bedeutsame Änderung. Bei der Lösung geometrischer Probleme macht die geforderte Konstruktion den ersten Teil der Synthesis aus (vgl. S. 160); die folgende Apodeixis hat aus den von vornherein „gegebenen" Beziehungen zwischen den „gegebenen" Größen und aus den dank der Konstruktion ersichtlichen Verhältnissen den Nachweis zu führen, daß diese Konstruktion den in der Aufgabe gestellten Bedingungen genügt. Bei den „arithmetischen" Problemen Diophants ist aber der letzte Schritt der Analysis, nämlich die Schlußberechnung, die die gesuchte Anzahl liefert, zugleich auch der erste Schritt der Synthesis: die Schlußberechnung entspricht ja in der Tat der geometrischen „Konstruktion". Die Umkehrung des Lösungsverfahrens bei Diophant entspricht somit nur dem zweiten Teil der „problematischen" Synthesis in der Geometrie (vgl. S. 160f.)[100]. — Sieht man nun, wie dies Vieta tut, die „analytische" Lösungsweise bei Diophant und die geometrische („problematische") Analysis als völlig parallele Verfahren an, so muß man zwischen den Gleichungs-Transformationen und dem Berechnen der gesuchten Anzahlen eine schärfere Grenze ziehen, als dies bei Diophant im allgemeinen der Fall ist. Man muß, mit anderen Worten, die bei Diophant selbst nur als Hilfsverfahren auftretende Lösungsweise ἐν τῷ ἀορίστῳ (vgl. S. 139f.) als das eigentliche Analogon zur geometrischen („problematischen") Analysis verstehen. Eine solche „unbestimmte" Lösung läßt dann auf Grund willkürlicher numerischer Annahmen eine beliebige Menge „bestimmter" Lösungen zu. Für Diophant gibt es aber nur eine beschränkte Möglichkeit der Anwendung dieses Verfahrens, weil es bei ihm selbst noch an bestimmte numerische Voraussetzungen gebunden bleibt. Der Vergleich mit der geometrischen Analysis läßt hier Vieta über Diophant hinausgehen.

### 2. Die universale Erweiterung des εἶδος-Begriffs zum „symbolischen" Begriff der species.

Wenn Hankel, a. a. O., S. 148, die „griechische Nationaleigentümlichkeit" beklagt, jede analytische Lösung in der Geometrie mit dem „unnützen Ballast" der dazugehörigen „vollständig durchgearbeiteten

[100]) In dieser Hinsicht stehen also die Diophantischen arithmetischen „Probleme" den geometrischen „Theoremen" näher als den geometrischen „Problemen". Die synthetische Apodeixis (die „Probe") ist hier einfach die Umkehrung der analytischen Apodeixis (vgl. S. 160 u. 138). Bemerkenswert für die Diophantische Terminologie ist jedenfalls auch hier ihr geometrisch-euklidischer Hintergrund (vgl. S. 140f.).

Synthesis" zu beschweren, „die alles in umgekehrter Ordnung noch einmal sagt", so verkennt er einen wesentlichen Unterschied zwischen der Analysis und der Synthesis. Die Analysis weist immer nur die Möglichkeit eines Beweises oder einer Konstruktion auf. Der „Beweis" eines Satzes ist erst geführt, wenn der in Frage kommende Sachverhalt tatsächlich allein aus den „gegebenen" Beziehungen zwischen den „gegebenen" Größen „abgeleitet" wird. Die Konstruktion einer durch bestimmte Bedingungen festgelegten Figur ist erst erfolgt, wenn diese Figur von den gerade in diesen bestimmten Ausmaßen „gegebenen" Größen aus auch tatsächlich gezeichnet wird. Die „Gegebenheit", von der in der Analysis Gebrauch gemacht wird, ist dagegen nur als „mögliche Gegebenheit" zu verstehen. Während so die Analysis unmittelbar die Allgemeinheit des Verfahrens im Auge hat, muß die Synthesis — gemäß der grundsätzlichen Auffassung von den Gegenständen der Mathematik — dieses allgemeine Verfahren an einem eindeutig bestimmten Gegenstand „realisieren" (vgl. S. 126 ff.). — Die „mögliche Gegebenheit" zeigt sich bei der geometrischen Analysis darin, daß in die als bereits vollzogen angesehene Konstruktion (das quaesitum tanquam concessum) auch die „gegebenen" Größen nicht in ihrer eindeutigen Bestimmtheit eingehen bzw. einzugehen brauchen, sondern nur in ihrem Charakter als „gegebene". Wie läßt sich dieser Sachverhalt auf die „arithmetische" Analysis übertragen? Offenbar so, daß die in einer Aufgabe „gegebenen" Anzahlen ebenfalls nur in ihrem Gegebenheits-Charakter und nicht als gerade diese bestimmten Anzahlen betrachtet werden. Es muß, mit anderen Worten, um die arithmetische Analysis der geometrischen völlig anzugleichen, auch den „gegebenen" Anzahlen eine gewisse Unbestimmtheit gelassen werden, die etwa nur durch den διορισμός der Aufgabe einzuschränken wäre. Dann ließe sich auch die Lösung ἐν τῷ ἀορίστῳ in jedem Falle geben, so daß in jedem Falle drei Stadien des Auflösungsprozesses unterschieden werden könnten: 1. die Aufstellung der Gleichung, 2. die Transformationen, denen man sie unterwirft, bis sie eine kanonische Gestalt angenommen hat, welche sofort die „unbestimmte" Lösung liefert, und 3. die numerische Auswertung dieser letzteren, d. h. die Berechnung eindeutig bestimmter Anzahlen, die die Bedingungen der gestellten Aufgabe erfüllen. Nur die beiden ersten Stadien stellen hier das eigentlich analytische Verfahren dar. Das letzte Stadium — als der geometrischen „Konstruktion" entsprechend — gehört im Grunde bereits der Synthesis an. — Wie ist es aber möglich, „gegebene" und also „bestimmte" Anzahlen als „unbestimmte" auftreten zu lassen? Hier liegt das Diophantische Vorbild vor: so wie Diophant die unbekannte, „an sich" ja ebenfalls „bestimmte" Anzahl (vgl. oben S. 145 f.) durch deren εἶδος, deren „species"

darstellt, die das „Wieviel" der Anzahl vorläufig unbestimmt läßt, so kann man ja **jede** Anzahl durch ihre „species" ausdrücken. Wenn bei Diophant (vgl. S. 147 ff.) die εἴδη der Unbekannten und ihrer Potenzen als neue Recheneinheiten erscheinen, die eigentliche Berechnung aber sich an den bestimmten Anzahlen vollzieht, müßte nun, bei ausschließlicher Verwendung der Anzahlen-„species", das „Rechnen" ganz und gar ins Gebiet des „Unbestimmten" verlegt werden. Auch diesen entscheidenden letzten Schritt vollzieht Vieta. Er vollzieht ihn im Bewußtsein, nichts anderes zu tun, als was bei den Alten, was insbesondere bei Diophant schon längst üblich gewesen, wenn auch von ihnen selbst nicht genügend klargestellt worden ist. Zwangsläufig muß er dabei die Überlieferung in wesentlichen Punkten umdeuten.

Von der dargelegten Parallelisierung der geometrischen („problematischen") Analysis und des Diophantischen Verfahrens aus gelangt also Vieta zur Konzeption einer Rechnungsweise, die nur noch an den Anzahlen-„species" durchzuführen ist und die er dementsprechend „logistice speciosa" nennt (im Gegensatz zur Rechnung mit bestimmten Anzahlen, der „logistice numerosa" — vgl. Cap. IV, Anf.)[101]). Die „logistice speciosa" steht folglich zunächst im engsten Zusammenhang mit dem Diophantischen Verfahren, das seinerseits das „arithmetische" Analogon zur geometrischen Analysis bildet. Zugleich aber — und dies ist für die Begriffsbildung in der modernen Mathematik von symptomatischer Bedeutung — stellt Vieta die „logistice speciosa" in den Dienst der „reinen" Algebra als der umfassenden, sowohl auf Anzahlen als auf geometrische Größen unterschiedslos anwendbaren allgemeinen „Analytik" (vgl. S. 162). Dadurch erfährt der εἶδος-Begriff, der Begriff der „species", unbeschadet seiner Bindung an den Anzahl-Bereich eine universale Erweiterung. Die species, die „formae rerum", wie Vieta auch sagt (Cap. IV, Anf.)[102]), stellen von diesem allgemeinen Verfahren aus gesehen schlechthin „allgemeine" Größen dar.

Diese Erweiterung des Diophantischen εἶδος-Begriffs wirkt sich unmittelbar in der neuen Gliederung der Analytik aus, die Vieta vornimmt (Cap. I)[103]). Den beiden von Pappus genannten Arten der Ana-

[101]) Der Terminus „logistice" meint bei Vieta „Rechenkunst", und zwar „theoretische" Rechenkunst, ohne daß hier ausdrücklich an die „Verhältnisse" der Anzahlen untereinander gedacht würde. Er trifft jedenfalls vollkommen, wenn auch gleichsam auf einem Umwege, den „logistischen" Charakter der Diophantischen „Arithmetik" (vgl. S. 139—140).

[102]) Xylander übersetzt εἶδος abwechselnd mit „species" und mit „forma".

[103]) „Et quanquam veteres duplicem tantum proposuerunt Analysin ζητητικὴν καὶ ποριστικήν, ad quas definitio Theonis maxime pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quae dicatur ῥητικὴ ἢ ἐξηγητική, consentaneum est, ut sit Zetetice qua invenitur aequalitas proportiove magnitudinis, de qua quaeritur, cum iis quae

lysis, der „theoretischen“ und der „problematischen“, fügt Vieta noch eine dritte hinzu, die er ῥητική oder auch ἐξηγητική nennt. Für die beiden ersten übernimmt er aus dem Text des Pappus bezeichnenderweise nicht die Ausdrücke θεωρητικόν und προβληματικόν, sondern ζητητικόν [sc. τἀληθοῦς] und ποριστικόν [sc. τοῦ προταθέντος]. Während bei Pappus der Unterschied der „theoretischen“ und der „problematischen“ Analysis durch die Verschiedenheit ihrer Objekte hinsichtlich ihrer „Objektivität“ („Theorem“ und „Problem“) bedingt ist (vgl. S. 160), vermag Vieta nur einen sehr äußerlichen Unterschied zwischen der „zetetischen“ und der „poristischen“ Analysis anzugeben, weil er von der Reflexion auf das Verfahren aus keinen Unterschied mehr zwischen „Theoremen“ und „Problemen“ macht, genauer: alle Theoreme als Probleme ansieht. Worauf es ihm ankommt, ist weniger das zu findende „Wahre“ selbst als das Finden des „richtigen Findens“. Daher auch seine allgemeine Definition der „analytischen Kunst“ als der „Lehre, in der Mathematik [überhaupt] in rechter Weise [das jeweils Gesuchte] zu finden“. Sowohl die „Zetetik“ als auch die „Poristik“, von denen Vieta ausdrücklich bemerkt, daß eigentlich nur sie allein von der Theonischen Definition der Analysis (vgl. S. 159 f.) gemeint seien, stellen jede für sich die beiden ersten, im eigentlichen Sinne analytischen Stadien des Auflösungsprozesses dar, von denen wir oben gesprochen haben (S. 168). Die „Zetetik“ bestimmt Vieta als das Verfahren, „durch welches die Gleichung oder die Proportion gefunden wird, die im Hinblick auf die gesuchte Größe mit Hilfe der gegebenen Größen aufzustellen ist“, die „Poristik“ als das Verfahren, „durch welches von der Gleichung oder der Proportion her die Wahrheit des [in ihnen] geordneten Theorems (!) untersucht wird“ [104]. In beiden Fällen ist

---

data sunt. Poristice, qua de aequalitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, qua ex ordinata aequalitate vel proportione ipsa de qua quaeritur exhibetur magnitudo. Atque adeo tota ars Analytice triplex sibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inveniendi in Mathematicis“.

[104]) Was diese Bestimmung besagen soll, ergibt sich aus dem kurzen 6. Kapitel: „De Theorematum per Poristicen examinatione“, das allerdings mehr von der „Synthesis“ und deren Verhältnis zur „Analysis“ als von der „Poristik“ handelt. Danach ist die „via Poristices“ dann zu beschreiten, wenn ein in den systematischen Zusammenhang nicht unmittelbar hineingehörendes Problem, das also zufällig oder nebenbei begegnet, vorgelegt wird („Quod si alienum proponitur inventum, vel fortuito oblatum, cujus veritas expendenda et inquirenda est; tunc tentanda primum Poristices via est . . .“). Beispiele davon seien von Theon in den „Elementen“ gegeben worden (womit Vieta wohl das oben (S. 159) genannte Scholion zu Euklid XIII, 1—5 meint, wo die Analysis und die Synthesis definiert werden), ferner von Apollonius in den „Kegelschnitten“ und von Archimedes in verschiedenen Büchern. Offenbar denkt Vieta hier an den Terminus πόρισμα in der Bedeutung von „corollarium“. Vgl. Proklus in Eucl. 212, 12—17: τὸ δὲ πόρισμα λέγεται . . . ἰδίως, ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι συναναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν, ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασιν, ὥσπερ

hier von der „Größe“ (magnitudo) im allgemeinsten Sinne die Rede. Nun ist aber die neue von Vieta eingeführte Analysis-Art definiert als das Verfahren, „durch welches die gesuchte Größe selbst aus der [zur kanonischen Form] geordneten Gleichung oder Proportion ans Licht gezogen wird“. Die gesuchte Größe „selbst“ ist entweder eine eindeutig bestimmte und daher aussagbare Anzahl oder eine anschauliche und eindeutig ausmeßbare geometrische Größe. Daher

---

τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον (vgl. auch 301, 22—25). S. auch S. 172, Anm. 106.

Parallel zur Zetetik („Zeteticorum libri quinque“, 1593) scheint Vieta auch eine „poristische“ Schrift verfaßt zu haben. Im 5. Kapitel des „Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber octavus“ behandelt er das traditionelle Problem der Würfelverdoppelung, d. h. der Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen, auf „synthetischem“ Wege und verweist dabei auf die „ex Poristicis methodus“, die er im „Supplementum Geometriae“ — beide Schriften sind ebenfalls 1593 erschienen — angegeben habe. Im „Supplementum Geometriae“ wird nun in der Tat das Problem — unter Zuhilfenahme des antiken νεῦσις-Verfahrens — auf „analytischem“ Wege gelöst, und zwar als Folgerung aus Prop. VII. Sowohl hier als auch in Prop. VI benutzt Vieta dabei Hilfssätze, von denen es heißt, sie seien „in Poristicis“ bewiesen worden. Diese Schrift ist uns nicht erhalten. Vielleicht gehörte sie zum Inhalt der übrigen 7 Bücher „variorum responsorum“, die Vieta in der „Isagoge“ zum Corpus des „Opus restitutae mathematicae Analyseos“ rechnet und die Marino Ghetaldi in den Händen gehabt zu haben behauptet (vgl. Ritter, S. 408).

Was die Gleichsetzung von „Theorem“ und „Problem“ anbetrifft, so war bereits Petrus Ramus deren entschiedener Verfechter. Im 3. Buch seiner vielgelesenen Schrift „Scholarum mathematicarum libri unus et triginta“ (1569) sagt er im Hinblick auf die einschlägigen Bestimmungen des Proklus: „tota ista problematis et theorematis differentia scholastica et commentitia est, mathematica non est . . .“; an einer anderen Stelle heißt es, daß diese differentia „inanis est et plane sophistica“ (zitiert nach der Ausgabe von L. Schoner, Frankfurt 1599, S. 86; 84). Mit dieser Polemik verfolgt Ramus den Zweck, die Mathematik durch Beseitigung aller „Dunkelheiten“ und überflüssigen Unterscheidungen zu „popularisieren“, wobei dieser Tendenz übrigens auch das ganze 10. Buch Euklids zum Opfer fällt (a. a. O., S. 252 — vgl. auch oben S. 159, Anm. 89). Nicht zum wenigsten auf Ramus, der nach dem Zeugnis seines Zeitgenossen Estienne Pasquier „grandement désireux de nouveautez“ gewesen ist (Waddington, a. a. O., S. 13), dürfte auch die beherrschende Stellung der „inventio“ in der Wissenschaft der 2. Hälfte des 16. Jahrh. zurückzuführen sein. Mit diesem aus der Rhetorik übernommenen Terminus kennzeichnet Ramus den ersten und wichtigsten der beiden Teile der „Dialektik“, die bei ihm an Stelle der Logik tritt und die er als „dialectica naturalis“ (bzw. logica naturalis) versteht (vgl. Dialecticae institutiones, 1575 [Nachdruck der 1. Ausg. von 1543], S. 1 ff. und 100 — s. auch Waddington, a. a. O., S. 367 ff.). — Nicht zu übersehen ist hier die — erst in der Folgezeit sich ganz auswirkende — Doppeldeutigkeit des Terminus „inventio“: „Auffindung“ und „Erfindung“. (Vgl. dazu z. B. den Brief von Johannes Sturm an Heinrich Schor [abgedr. am Anfang des „Commentarius doctissimus in Dialecticam Petri Rami“ von Rudolph Snellius (1595)], wo es heißt: „Si idem semper sentiendum et loquendum sit: nihil novi invenire liceat“. Sturm beruft sich dabei übrigens ausdrücklich auch auf die Mathematiker. — S. ferner weiter unten S. 227, Anm. 202.)

der doppelte Name dieser dritten Analysis-Art, der es obliegt, von der kanonisch geordneten Gleichung aus sowohl die Berechnung „arithmetischer" als auch die Konstruktion „geometrischer" Größen zu bewerkstelligen: ῥητική heißt sie im Hinblick auf die Anzahlen, zu denen sie führt und die mit den gewöhnlichen Zahlworten unserer Sprache ausgedrückt werden können; ἐξηγητική heißt sie im Hinblick auf die geometrischen Größen, die sie unmittelbar zur Anschauung bringt[105]. Die „Rhetik" bzw. „Exegetik" stellt somit das dritte (End-)Stadium in der Auflösung einer Gleichung dar, das — wie wir gesehen haben (S. 168) — im Grunde bereits der Synthesis zuzurechnen ist, von Vieta aber dennoch als analytisches Verfahren verstanden wird[106]. In diesem letzten Stadium muß der „Analytiker"

[105]) vgl. Cap. VII („De officio Rhetices"): „Ordinata Aequatione magnitudinis de qua quaeritur, ῥητικὴ ἢ ἐξηγητική . . . suum exercet officium; tam circa numeros, si de magnitudine numero explicanda quaestio est, quam circa longitudines, superficies, corporave, si magnitudinem re ipsa exhiberi oporteat". (Vgl. S. 162 das Zitat aus dem „Apollonius Gallus".) Beide Bezeichnungen werden aber von Vieta durchaus promiscue gebraucht: so spricht er im 8. Kapitel, § 23, ausdrücklich von der „Exegetice in Arithmeticis" und nennt die entsprechende Schrift „De numerosa potestatum ad Exegesin resolutione".

[106]) Die „Synthesis" tritt bei Vieta überhaupt beträchtlich hinter die „Analysis" zurück, obgleich er bei geometrischen Problemen häufig von ihr Gebrauch macht und ihren traditionellen Vorrang anerkennt. Im 6. Kapitel der „Isagoge" sagt er ausdrücklich, daß die Ergebnisse der Analyse in die von der Kunst geforderte Ordnung (in artis ordinationem) zu bringen seien, gemäß den „Gesetzen" (leges) κατὰ παντός, καθ' αὑτό, καθόλου πρῶτον. (Diese auf Aristoteles, Anal. post. A 4, zurückgehenden Bestimmungen übernimmt Vieta hier offensichtlich in der Interpretation von Ramus, der sie bei jeder Gelegenheit, vor allem in der Vorrede zu den „Scholae physicae" (1565) — vgl. auch „Scholae mathematicae" S. 78 ff. — als die für jede Wissenschaft gültigen „leges logicae" herausstellt. Durch die lex κατὰ παντός, sagt Ramus, „non modo falsa, sed fortuita tollentur" [vgl. oben die Vieta'schen Bestimmungen der „Poristik", die er im 6. Kapitel eben in einen gewissen Gegensatz zu dieser lex zu setzen scheint]. Durch die lex καθ' αὑτό werde gefordert, daß jede Kunstregel (artis decretum) „homogeneum, et tanquam corporis ejusdem membrum" sei [vgl. dazu weiter unten die Vietasche „lex homogeneorum"].) Deshalb müßten jene Ergebnisse, die bereits durch die Zetetik bewiesen und in ihrer Festigkeit erprobt seien (quanquam suam habent ex Zetesi demonstrationem et firmitudinem), der „Synthesis" unterworfen werden, die gemeinhin als beweiskräftigerer Weg angesehen werde (quae via demonstrandi censetur λογικωτέρη), was also dazu führe, daß die Spuren der „Analysis" zurückverfolgt würden (atque idcirco repetuntur Analyseos vestigia). Dies aber sei — fügt Vieta bezeichnenderweise hinzu — selbst analytisch (quod et ipsum Analyticum est), infolge der von ihm eingeführten Species-Rechnung auch weiter nicht beschwerlich (neque propter inductam sub specie Logisticen iam negociosum). — Bei der Bevorzugung der „Analysis" ist übrigens die Mehrdeutigkeit des entsprechenden lateinischen Terminus „resolutio" zu beachten, der sowohl die „Rückwärts-Lösung" im Sinne des Pappus (ἀνάπαλιν λύσις — Hultsch II, 634, 18), wie die „Auflösung" in die Grundbestandteile (vgl. „De numerosa potestatum ad Exegesin resolutione", Anfang: „Nihil tam naturale est, secundum Philosophos omnes, quam unumquodque resolvi eo genere quo

entweder zum „Geometer“ oder zum „Rechner“ im gewöhnlichen Sinne werden[107]). Als Geometer vollbringt er sein Werk gemäß der „Auflösung“ einer „anderen, jedoch ähnlichen“ Aufgabe, sofern er ja in der Konstruktion „synthetisch“ die an anderen „gegebenen“ Größen (vgl. oben S. 168), nämlich die „rein“ algebraisch durchgeführte Analysis (resolutio) in umgekehrter Reihenfolge „wiederholt“. Er kann hierbei auch seine voraufgegangene rein-algebraische, „analytische“ Arbeit „verbergen“, das Problem unmittelbar „synthetisch“ zu lösen vorgeben und es dann erst — gleichsam zur Unterstützung der Rechner — von der an der synthetischen Konstruktion abzulesenden Gleichung aus analytisch angreifen[108]). Die „geometrische Lösung“ (die effectio Geometrica) vollzieht sich also dann in der Weise, daß sie die Synthesis nicht aus der Gleichung, sondern die Gleichung aus der synthetischen Konstruktion gewinnt und rechtfertigt, während diese für sich selbst spricht („compositionem operis non ex aequalitate, sed aequalitatem ex compositione arguit, et demonstrat: ipsa vero compositio seipsam“)[109]).

compositum est“), wie endlich die „Lösung“ schlechthin meint. — Auch für Descartes ist die „Analysis“ weit wesentlicher als die „Synthesis“: vgl. insbesondere die „Secundae responsiones“, Ad.-Tann. VII, 155—159. Er sagt hier (S. 156): „Ego vero solam Analysim, quae vera et optima via est ad docendum, in Meditationibus meis sum sequutus“. Der Nachteil der Synthesis gegenüber der Analysis besteht für Descartes darin, daß sie nicht die Art und Weise lehrt, in der die Sache gefunden worden ist („quia modum quo res fuit inventa non docet“ — ebda); vgl. Regulae ad directionem ingenii, Reg. IV, Ad.-Tann. X, 375.

[107]) „Et hic se praebet Geometram Analysta, opus verum efficiundo post alius, similis vero, resolutionem: illic Logistam, potestates quascumque numero exhibitas, sive puras, sive adfectas, resolvendo“.

[108]) „Itaque artifex Geometra, quanquam Analyticum edoctus, illud dissimulat, et tanquam de opere efficiundo cogitans profert suum syntheticum problema, et explicat: Deinde Logistis auxiliaturus de proportione vel aequalitate in eo adgnita concipit et demonstrat Theorema“.

[109]) In diesem Sinne gehören die Schriften „Effectionum geometricarum canonica recensio“ und „Supplementum Geometriae“ (beide 1593) zur „Exegetik“. Letztere stellt insofern ein „Supplementum“ dar, als in ihr, wie Vieta im 8. Kapitel der „Isagoge“, § 25 — vgl. auch den Anfang des „Suppl. Geom.“ selbst — sagt, „quasi Geometria suppleatur Geometriae defectus“, nämlich von dem Verfahren der νεῦσις Gebrauch gemacht wird. Dadurch lassen sich bei planimetrischen Aufgaben, die sonst zu kubischen (oder auch biquadratischen) Gleichungen führen — worin eben der defectus der gewöhnlichen Geometrie besteht —, diese Gleichungen vermeiden. Das entsprechende Postulat, wonach es immer möglich ist, von einem gegebenen Punkte aus eine Gerade zu ziehen, die zwei gegebene Geraden (bzw. einen Kreis und eine Gerade) in der Weise schneidet, daß das von den beiden gegebenen Geraden (bzw. dem Kreis und der Geraden) eingeschlossene Stück derselben von einer gegebenen Länge ist — ein αἴτημα non δυσμήχανον, wie Vieta sagt — („Isagoge“, Cap. VIII, § 25 und „Suppl. Geom.“, Anf.), wird von ihm durch die Autorität des Nikomedes und vor allem durch die des Archimedes gestützt (vgl. Zeuthen, Die Math. im Altert. u. im Mittelalt., S. 41). — Zur „Exegetik“ gehört auch die Abhandlung „Analytica angularium sec-

Als Rechner löst er numerisch — sei es genau, sei es durch Näherungsverfahren — entweder binomische Gleichungen (resolutio potestatum purarum) oder beliebige andere, vor allem trinomische Gleichungen (resolutio potestatum adfectarum)[110]. In jedem Fall darf er nicht

tionum in tres partes tributa", die erst nach dem Tode Vieta's von Anderson 1615 herausgegeben worden ist (ed. van Schooten, S. 287—304). — Vgl. dazu „Isagoge", Cap. VIII, §§ 24—27.

Die „Exegetice in Geometricis" stellt eine „geometrische Algebra" im strengen Sinne dar. Vorläufer Vieta's sind in dieser Hinsicht Bombelli, und zwar in den zwei letzten, erst kürzlich von Bortolotti veröffentlichten, Büchern seiner „Algebra", die deren „geometrischen Teil" enthalten (vgl Bortolotti, a. a. O., S. 19) und Bonasoni, der seinem Traktat ausdrücklich den Titel „Algebra Geometrica" gibt (vgl. Bortolotti, Primordi della geometria analitica. L'Algebra geometrica di Paolo Bonasoni nel Mss. 314 della Biblioteca Universitaria di Bologna, 1925, in dem Sammelband des gleichen Verfassers: Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII, 1928). Den von Bortolotti mitgeteilten Auszügen aus diesem — zwischem 1574 und 1587 entstandenen — Traktat ist zu entnehmen, daß Bonasoni nicht nur Buteo, sondern auch Estienne de la Roche (Villafranca) zitiert (a. a. O., S. 14—15). Also war jedenfalls das Werk von Estienne de la Roche (oder Stephanus Gallus, wie Bonasoni sagt), das Nicolas Chuquet's 1484 verfaßten (erst 1880 von Aristide Marre veröffentlichten) „Triparty en la science des nombres" weitgehend verwertet, in der fraglichen Zeit in Bologna genau bekannt. Das legt die Vermutung nahe, daß Bonasoni's Landsmann Bombelli, der von Bonasoni ja auch ausdrücklich zitiert und benutzt wird (vgl. a. a. O., S. 15 und 6), ebenfalls — über Estienne de la Roche — im Wirkungsbereich von Chuquet steht. So würde sich insbesondere zwanglos die von Bombelli verwandte Bezeichnung der Potenzen der Unbekannten erklären. (Über das Verhältnis Chuquet's zu Estienne de la Roche vgl. Aristide Marre in der Einleitung zu seiner Chuquet-Edition, Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubbl. da B. Boncompagni, XIII, 1880, S. 569—580; ferner Cantor II², 347—364 und 371—374). — Zu erwähnen wäre noch, daß Bonasoni, wie später Vieta, auf die bloß „algebraische" Problemlösung Regiomontans (vgl. oben S. 161, Anm. 95) Bezug nimmt und sie entsprechend „geometrisch" ergänzt (Bortolotti, a. a. O., S. 16). Vgl. dazu auch Marino Ghetaldi's Variorum problematum collectio, 1607 (Cantor II², 809 — s. weiter unten S. 192, Anm. 145, gegen Ende) und endlich Clavius, Geometrica practica, 1604, lib. VI.

[110]) Vgl. Cap. VIII, § 23: „Potestatum porro quarumcumque, sive purarum sive (quod nesciverunt veteres, neque novi) adfectarum tradit Ars resolutionem" (dazu auch Cap. III, § 6 — irrtümlich als § 9 bezeichnet). Dies geschieht in der Schrift: „De numerosa potestatum ad Exegesin resolutione" (1600); ferner in den erst 1615 von Anderson herausgegebenen Abhandlungen „De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo" (ed. van Schooten, S. 84—158; vgl. namentlich S. 127: „nunc autem circa numerosam Analysin magis esse intentum, nostri est instituti"), wenn diese auch vor allem das zweite Stadium des analytischen Prozesses, nämlich die Transformationen betreffen, die eine Gleichung in ihre kanonische Form überführen (vgl. Ritter, S. 390; 396 f.). (Die Abhandlung „De emendatione" gibt den Inhalt der in der „Isagoge" angekündigten Schrift: „Ad logisticen speciosam Notae posteriores" wieder und enthält eine Reihe von auf Gleichungstransformationen bezüglichen Formeln [„Notae"]. Sie lehrt insbesondere allgemeine Methoden zur Auflösung von Gleichungen 3. und 4. Grades, z. T. nach dem Vorbild Bombelli's. Die Schrift „Ad logisticen speciosam Notae priores" [erstmalig von Jean de Beaugrand 1631 her-

vergessen, an einem specimen den hierbei angewandten Kunstgriff klarzustellen [111]). Die „Rhetik" bzw. „Exegetik" umfaßt also eine Reihe von „Regeln" (praecepta), wodurch sie als wichtigster Teil der „Analytik" anzusprechen ist: sie verleiht der „analytischen Kunst" dadurch erst ihren Charakter als „Kunst", während die „Zetetik" und die „Poristik" wesentlich nur aus „Beispielen" (exempla) bestehen („ῥητικὴ ἢ ἐξηγητική ... censenda est ... potissimum ad artis ordinationem pertinere, cum reliquae duae [sc. partes Analytices] exemplorum sint potius quam praeceptorum, ut logicis iure concedendum est") [112]).

Aus dieser Gliederung der „Analytik" erhellt, daß die „allgemeine Analytik" von Vieta nur als das unentbehrliche Hilfsmittel zur Lösung geometrischer und numerischer Aufgaben verstanden wird, nicht aber als eine in sich vollendete und sich selbst genügende Disziplin. Die „allgemeine Analytik" ist in erster Linie eine „Technik" — um uns des modernen Ausdrucks zu bedienen —: sie zielt nicht auf die Erschließung eines seinem Umfang nach annähernd übersehbaren Bereichs von wahren Sachverhalten, nicht auf die Lösung einer bestimmten Anzahl von Problemen, sondern will ein Werkzeug zur Lösung von Problemen überhaupt sein. Ihren „Stoff" bildet nicht ein einzelnes Problem oder eine Reihe einzelner Probleme, sondern — wie Vieta selbst sagt (vgl. S. 158 u. 194) — das Problem, überhaupt Probleme lösen zu können (problema problematum): sie stellt die Kunst des Findens oder das Finden des Findens dar. Die „allgemeine Analytik" Vieta's ist auf dem Gebiet des mathematischen Findens in demselben Sinne ein „Organon", in dem es die aristotelischen „logischen" Schriften, vor allem eben die „Analytiken", auf dem Gebiet jedes möglichen Wissens sind. Da aber — wovon noch zu sprechen sein wird — die „allgemeine Analytik" seit Descartes die Rolle der antiken ontologischen Grunddisziplin übernimmt, ist sie auch von da an bemüht, sich ganz und gar an die Stelle der traditionellen Logik zu setzen. Der so im 17. Jahrh. um den Vorrang hinsichtlich des Verständnisses des Weltaufbaus einsetzende Kampf zwischen der

---

ausgegeben] stellt eine Sammlung elementarer allgemein-algebraischer Formeln dar, die geometrischen bzw. arithmetischen Sätzen des 2. und des 9. Buches der Euklidischen „Elemente" entsprechen.)

[111]) Diese Bemerkung richtet sich unmittelbar gegen Diophant (s. weiter unten S. 176f. und auch S. 148, Anm. 55).

[112]) vgl. oben S. 129. — Die ursprünglich der Rhetorik angehörenden Begriffe „praecepta" und „exempla" verraten wiederum den Einfluß von Ramus, dessen „Erneuerung" der Logik eben darin bestand, daß er sie von der Rhetorik aus aufzubauen suchte. So sind hier unter den „logici" die Anhänger der Ramistischen Reform zu verstehen.

peripatetischen Syllogistik und der mathematischen Analysis [113]) dauert noch heute — allerdings unter völlig verdunkelten ontologischen Voraussetzungen — in dem Streit zwischen der „formalen Logik" und der „mathematischen Logik" oder „Logistik" fort. — Bei Vieta selbst steht die „analytische Kunst" als Ganzes, d. h. in ihren drei „Arten", im Dienst seiner kosmologisch-astronomischen Forschung, der es vor allem auf die numerische Auswertung der Lösungen, also auf die „Rhetik" oder „Exegetik" ankommt. Deshalb auch sein Bemühen um die Ausbildung von Näherungsverfahren, die freilich im Rahmen einer als „Werkzeug" des „Findens" gedachten „Kunst" ohne weiteres einen Platz beanspruchen dürfen [114]). Deshalb auch der Vorrang der „Rhetik" oder „Exegetik" gegenüber den beiden anderen „Arten" der Analytik (vgl. oben S. 175). Wenn wir nach dem oben Gesagten von der „Poristik" absehen, hat dabei von der „logistice speciosa" nur die „Zetetik" Gebrauch zu machen, die so genau genommen allein die „allgemeine Analytik", die „neue Algebra" repräsentiert. Wir haben aber bereits gesehen (S. 169), daß der „logistice speciosa" bei Vieta eine doppelte Funktion zukommt, nämlich sofern sie einerseits als das Verfahren der allgemeinen „reinen" Algebra und andererseits als das der geometrischen Analysis analoge, auf die Diophantische „Arithmetik" unmittelbar bezogene Verfahren verstanden wird. Beide Deutungen zugleich sind überhaupt nur möglich, weil eben der „allgemeinen" Algebra nur die Rolle eines Hilfsverfahrens zugewiesen wird. Damit hängt es auch zusammen, daß Vieta von Diophant annimmt, er habe seine „arithmetischen" Probleme mit Hilfe der im Vieta'schen Sinne geübten „Zetetik" gelöst, dies jedoch zu „verbergen" für richtiger gehalten. So heißt es am Schluß des 5. Kapitels der „Isagoge" („De legibus Zeteticis"): „Die zetetische Kunst aber hat am scharfsinnigsten von allen Diophant ausgeübt, in jenen Büchern, die vom ‚Arithmetischen' handeln. Er hat sie jedoch in der Weise dargestellt, als wäre sie in den Anzahlen und nicht auch in den species, deren er sich sehr wohl bedient hat, gegründet, damit seinem Scharfsinn und seiner Geschicklichkeit um so mehr Bewunderung gezollt würde: weil ja das, was dem Anzahlen-Rechner schwierig und undurchsichtig vorkommt, dem

---

[113]) vgl. Descartes, Regulae ad directionem ingenii, Ad.-Tann. X, 365, 6—9; 372f.; 405f.; 439f. [s. weiter unten S. 193, Anm. 149]. — Vgl. hierzu auch des Jacobus Acontius' Traktat „De methodo", 1558, neu herausgegeben von Dr. Herman J. de Vleeschauwer, Universiteit te Gent, Werken uitgegeven door de Fakulteit der wijsbegeerte en letteren, 67e Aflevering, 1932.

[114]) Hierher gehört auch der Gebrauch von Dezimalbrüchen (vgl. weiter unten S. 199, Anm. 162).

Species-Rechner ganz vertraut und sofort zugänglich ist"[115]). Die Kunst der „alten Analytiker" erscheint (Cap. I) nur darum als „Gestammel" (oscitantia), weil sie ihre Arbeit an den Anzahlen zu verrichten vorgibt, statt eigentlich kunstgerecht (ex arte propria) vorzugehen und die Rechnung durchweg an den species zu vollziehen. Wenn also Vieta (ebda.) von der „neu einzuführenden Species-Rechnung" (logistice sub specie noviter inducenda) spricht, so handelt es sich für ihn nur um die Wiederaufnahme, um die erneute Betätigung einer im Altertum bekannten und bewährten Kunst[116]). Er kann sich hierbei nicht nur auf die instrumentale Verwendung des εἶδος-Begriffs bei Diophant stützen, sondern auch auf die Lösungen ἐν τῷ ἀορίστῳ, die dieser als Hilfsverfahren (vgl. S. 139 f. u. 167) benutzt und die

[115]) „Zeteticen autem subtilissime omnium exercuit Diophantus in iis libris qui de re Arithmetica conscripti sunt. Eam vero tanquam per numeros, non etiam per species, quibus tamen usus est, institutam exhibuit, quo sua esset magis admirationi subtilitas et solertia, quando quae Logistae numeroso subtiliora adparent, et abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt et statim obvia".

[116]) Genau derselben Meinung ist Descartes, der sein Mißtrauen nur noch schärfer zum Ausdruck bringt. Pappus und Diophant, sagt er (Regulae, Ad.-Tann. X, 376 f. — vgl. oben S. 158, Anm. 87), hätten ihr wahres Wissen aus „einer Art verderblicher Schlauheit" (perniciosa quadam astutia) uns vorenthalten, „nam sicut multos artifices de suis inventis fecisse compertum est, timuerunt forte, quia facillima erat et simplex [sc. vera Mathesis], ne vulgata vilesceret [vgl. Cogitationes privatae, Ad.-Tann. X, 214: „Scientia est velut mulier: quae si pudica apud virum maneat, colitur; si communis fiat, vilescit"], malueruntque nobis in eius locum steriles quasdam veritates ex consequentibus acutule demonstratas, tanquam artis suae effectus, ut illos miraremur, exhibere, quam artem ipsam docere, quae plane admirationem sustulisset". Vgl. auch a. a. O., S. 373: „satis enim advertimus veteres Geometras analysi quadam usos fuisse, quam ad omnium problematum resolutionem extentebant, licet eamdem posteris inviderint. Et iam viget Arithmeticae genus quoddam, quod Algebram vocant, ad id praestandum circa numeros, quod veteres circa figuras faciebant". (Vgl. ferner Reg. III, Anf.) In den „Secundae responsiones" (Ad.-Tann. VII, 156) sagt Descartes, die Alten hätten in ihren Schriften zwar von der „Synthesis", nicht aber von der „Analysis" Gebrauch gemacht (!), nicht etwa, weil sie diese gar nicht gekannt hätten, „sed, quantum judico, quia ipsam tanti faciebant, ut sibi solis tanquam arcanum quid reservarent". Im übrigen verfuhr Descartes selbst nach diesem Rezept: er hat seine „Geometrie" absichtlich „dunkel" geschrieben — vgl. Ad.-Tann. II, 510 ff.; I, 411, auch 377 und 478. — Noch bei Wallis — der hierin eben von Vieta und Descartes abhängig ist — heißt es in Bezug auf den richtigen Umgang mit den „algebraischen" Größen: „Hoc autem cum olim vel ignorabant vel non satis attendebant, vel forte dissimulabant, adeoque occultabant Algebristae Veteres ..." (Mathesis universalis, Opera I, 1695, p. 53). Vgl. Wallis, Algebra, Praefatio (Opera II, 1693): „Hanc [sc. Algebram] Graecos olim habuisse non est quod dubitemus, sed studio celatam, nec temere propalandam"; Cap. II (a. a. O., p. 3): „Mihi quidem extra omne dubium est, veteribus cognitam fuisse, et usu comprobatam, istiusmodi artem aliquam Investigandi, qualis est ea quam nos *Algebram* dicimus ... Hanc autem Artem Investigandi Veteres occuluerunt sedulo ..."

Vieta offensichtlich als Spuren der wahren Diophantischen Kunst, nämlich der als „allgemeines“ mathematisches Hilfsverfahren begriffenen „reinen“ Analytik erscheinen[117]).

Mit dieser Interpretation der Diophantischen „Arithmetik“, die sie ausschließlich vom Gesichtspunkt des kunstgerechten Verfahrens aus beurteilt und an ihren bestimmten Lösungsergebnissen als „unfruchtbaren Wahrheiten“ (um mit Descartes zu sprechen) nur geringes Interesse hat, schreibt Vieta der späteren historischen Forschung bis auf den heutigen Tag ihre Betrachtungsweise vor (vgl. oben S. 140). Es drückt sich darin die Selbstverständlichkeit aus, mit der das moderne Bewußtsein an der fundamentalen Änderung der antiken Begrifflichkeit und Weltauslegung festhält, wie sie erstmalig gerade in Vieta's Grundlegung einer „allgemeinen Analytik“ eine faßbare Gestalt gewinnt.

Welches sind in der Tat die begrifflichen Voraussetzungen, die eine solche Interpretation der Diophantischen „Logistik“ ermöglichen? Was versteht Vieta unter den „species“, die den Gegenstand der „allgemeinen Analytik“ ausmachen, und in welcher Weise versteht er sie? Moritz Cantor (II², S. 631 und 519) hat die Meinung geäußert, die „species“ wären „versinnlichende Zeichen von Raumgebilden“, also „Größen, nicht Zahlen“, und sich hierbei auf den Sprachgebrauch Vieta's berufen, der im 4. Kapitel der „Isagoge“ die an den species vorzunehmenden Operationen der „Multiplikation“ und der „Division“ (von denen in eben diesen Worten im 2. Kapitel die Rede ist) mit „ducere“ (sc. magnitudinem in magnitudinem) und „adplicare“ (sc. magnitudinem magnitudini) bezeichnet. Diese Termini entstammten aber geometrischen Vorstellungen, und so wiese noch Tartaglia in seinem „General trattato di numeri et misure“ (1556—1560) die Termini „multiplicare“ und „partire“ dem numerischen Bereich, „ducere“ und „misurare“ dagegen dem geometrischen zu (wobei die letzteren auch auf „Brüche“ — wegen der nur bei geometrischen Gebilden möglichen „stetigen“ Teilung — angewandt werden sollten). — Fraglos hängen für Vieta die „species“ mit überlieferten geometrischen Bestimmungen zusammen, weil ja in ihren Bezeichnungen, wie schon bei Diophant selbst (vgl. oben S. 147; 149), die alte Lehre von den „figurierten“ Anzahlen anklingt, die Vieta, dem großen Kenner der antiken mathematischen Literatur, aus Nikomachos und Theon von Smyrna selbstverständlich bekannt war[118]). (Auch ist hier an die Beziehung des Diophantischen

---

[117]) Auch die Generalisierung, die Bombelli mit den Problemlösungen Diophants vornimmt, hat dessen Verfahren ἐν τῷ ἀορίστῳ zum Vorbild (vgl. Bortolotti, a. a. O., S. 18f.; 44).

[118]) Seine Kenntnis Theon's ist durch seine Berufung auf eine Äußerung Adrast's zu belegen, die sich nur bei Theon findet (Hiller 73, 18f. — vgl. weiter unten S. 181, Anm. 124). — Auch sonst findet sich in der zeitgenössischen mathematischen Literatur

εἶδος-Begriffs zum entsprechenden geometrischen Begriff des τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει — vgl. oben S. 141 — zu erinnern.) Dies mag für ihn ein Grund mehr gewesen sein, auch hinter der geometrischen Analysis eben dieselbe „allgemeine" analytische Kunst zu vermuten, die seiner Meinung nach der Diophantischen „Arithmetik" zugrunde liegt. Für die Struktur des species-Begriffs weit wesentlicher als diese geometrischen Anklänge ist 1. gerade die universale Erweiterung, die dem Diophantischen εἶδος-Begriff durch Vieta zuteil wird, wodurch die species zum Gegenstand einer „allgemeinen", weder mit der Geometrie noch mit der Arithmetik identifizierbaren mathematischen Disziplin werden, und 2. der hier trotzdem von Vieta bewahrte direkte Zusammenhang mit der „logistice numerosa", also mit dem „Rechnen", das seinem ursprünglichen Sinne nach ein homogenes Feld von Monaden voraussetzt (vgl. Teil I, S. 49; 53; 55 f.; 58 f.) und folglich auf „Anzahlen" und deren Beziehungen angewiesen ist. — Nachdem Vieta im 3. Kapitel die „hochehrwürdige und -bedeutsame" Stufenleiter der „Gattungen" der unbekannten Größen („solemnis magnitudinum ex genere ad genus vi sua proportionaliter [119]) adscendentium vel descendentium series seu scala" — Cap. I, Schluß) angegeben und ihr die entsprechende Reihe der bekannten, mit den unbekannten in Beziehung zu setzenden Größen gegenübergestellt hat [120]), geht er im

die Gleichsetzung von „algebraischen" Größen und von „figurierten" Anzahlen. So heißt es z. B. in dem „Fundamentum astronomicum" (1588) des Raimarus Ursus (p. 13r): „. . . vel dicto iam modo Geometrice in triangulis aequalium angulorum, vel etiam Arithmetice in numeris Algebraicis seu figuratis . . .". Noch bei Adrianus Metius, Arithmeticae et geometricae practica, 1611, Lib. II, Cap. III, p. 56 ff., werden die „algebraischen" Größen als „numeri figurati" eingeführt. Vgl. auch Descartes, Regulae, Reg. XIV, Ad.-Tann. X, 450 f. (s. weiter unten S. 216, Anm. 189).

[119]) d. h. in stetiger Proportion: $x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 \ldots$

[120]) Die unbekannten Größen heißem demnach „magnitudines scalares"; ihre „Stufen" (gradus) sind:

Latus seu Radix
Quadratum
Cubus
Quadrato-quadratum
Quadrato-cubus
Cubo-cubus
Quadrato-quadrato-cubus
Quadrato-cubo-cubus
Cubo-cubo-cubus.

Es ist also nicht die bis dahin übliche, noch von Bombelli (L'Algebra, S. 6) und Gosselin benutzte „anatolianische" Nomenklatur (vgl. S. 151, Anm. 60), die — modern ausgedrückt — durch Multiplikation der Exponenten entsteht und bis zur 9. Potenz geht, sondern die entsprechend fortgeführte Diophantische, bei der die Exponenten addiert werden. Vieta bemerkt am Schluß noch: „Et ea deinceps serie et methodo

4. Kapitel dazu über, die Grundregeln der Species-Rechnung (Logistices speciosae canonica praecepta) darzulegen. Sie entsprechen den Regeln der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division in der gewöhnlichen Rechenlehre [121]). Jede species wird durch einen Buchstaben dargestellt (wobei die Vokale den unbekannten, die Konsonanten den bekannten Größen zugeordnet sind — vgl. Cap. V, § 5 [122])), dem die Bezeichnung der Stufe bzw. der Gattung — vom 2. Grade an — beigefügt ist. Demnach sieht eine an species vollzogene Rechnung in der „allgemeinen Analytik" Vieta's z. B. so aus:

$$\frac{A \text{ cubus} - B \text{ solido } 3}{C \text{ in } E \text{ quadratum}} \quad \left(\text{modern: } \frac{x^3 - 3b}{cy^2}\right)$$

Hierbei ist nach Vieta (Cap. III, Anf.) stets die grundlegende „lex homogeneorum" zu beachten, wonach nur „gleichartige" Größen

denominanda reliqua". (Gosselin verwirft die Diophantische Nomenklatur ausdrücklich — vgl. a. a. O., S. 4v ff., Cap. VI „De numerorum nominibus".)

Die genera der bekannten Größen (der „magnitudines comparatae") ordnen sich entsprechend in die Reihe:

Longitudo latitudove
Planum
Solidum
Plano-planum
Plano-solidum
Solido-solidum
Plano-plano-solidum
Plano-solido-solidum
Solido-solido-solidum,

„et ea deinceps serie et methodo denominanda reliqua".

(Zur Reihe der „scalares" vgl. Diophant 4, 14—6, 5; zur Reihe der „comparatae" Diophant 2, 18—4, 7, wobei jedoch der Ausdruck πλευρά bei Vieta zur Kennzeichnung der ersten Stufe der „scalares" dient. — Siehe auch S. 145, Anm. 50.) — Im 15. Jahrh. gibt es übrigens zwei Fälle, in denen die Diophantische Nomenklatur benutzt wird — vgl. Tropfke II³, S. 137 f.

[121]) Zu den Regeln der Multiplikation und der Division vgl. Diophant „Def. IV" (8, 1—10) und „Def. X" (14, 1 f.). — Außer diesen „praecepta" gibt Vieta in der „Isagoge" noch die „leges Zeteticae" an (Cap. V), welche sich auf die elementaren Gleichungstransformationen beziehen, nämlich insbesondere auf die „Antithesis" (das Herüberschaffen eines Gliedes von einer Seite der Gleichung auf die andere), den „Hypobibasmus" (die Verringerung des Grades einer Gleichung, indem alle Glieder derselben durch die ihnen allen gemeinsame species dividiert werden) und den „Parabolismus" (das Wegschaffen des Koeffizienten der „potestas" [vgl. S. 182, Anm. 127] bzw. die Überführung der Gleichung in die Form einer Proportion, eines „Analogismus" [vgl. S. 163 ff.]) — vgl. dazu Diophant 14, 11 ff.

[122]) Über einen möglichen Zusammenhang dieser Bezeichnungsweise mit dem Gebrauch der Buchstaben bei Ramus vgl. Cantor II², 632; 564. — Im übrigen hat Vieta in der Verwendung von Buchstaben für die Unbekannten einen Vorläufer in Joh. Buteo, Logistica, quae et Arithmetica vulgo dicitur, 1559 (vgl. Tropfke III², 34 und 136) und in Bonasoni (vgl. S. 174, Anm. 109 und die dort angegebene Arbeit Bortolotti's, S. 5).

miteinander verglichen (in Gleichung gesetzt) werden können: „homogenea homogeneis comparari“. Dieses Gesetz stellt das „oberste und ewige Gesetz der Gleichungen oder Proportionen“ dar (prima et perpetua lex aequalitatum seu proportionum) und besagt — in moderner Terminologie — daß alle Glieder einer Gleichung die gleiche Dimension haben müssen. Es können demnach in additive und subtraktive Beziehung zueinander nur solche Größen treten, die der gleichen bzw. entsprechenden „Stufe“ angehören, was aber gerade nicht für die Multiplikation und die Division gilt[123]). Das „Homogeneitätsgesetz“ Vieta's hat also unmittelbar nichts mit der von ihm zitierten Äußerung Adrast's[124]) zu tun, die eine Erläuterung von Euklid V, Def. 3 darstellt, wonach ein Verhältnis nur zwischen „homogenen Größen“ bestehen könne (Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατά πηλικότητά ποια σχέσις). Es ist bei den antiken Mathematikern durchaus üblich, z. B. ein Verhältnis von Längen mit einem Verhältnis von Flächen zu „vergleichen“ und beide in „Proportion“ zu bringen[125]). Das Vieta'sche „Homogeneitätsgesetz“ betrifft vielmehr die fundamentale Tatsache, daß jede „Rechnung“, die letztlich doch auf dem „Abzählen“ der zu Grunde gelegten Einheiten beruht, ein Feld gleichartiger Monaden voraussetzt. Für die Diophantische „Logistik“ ist diese Forderung in selbstverständlicher Weise erfüllt, weil sie sich eben im Felde der „reinen“ Monaden begibt: die hier zu einer Gleichung vereinigten bekannten und unbekannten „Größen“ stellen allesamt „Anzahlen von Monaden“ dar (vgl. S. 136 f. und 145 ff.)[126]). Für die „logistice speciosa“ muß diese grundlegende Voraussetzung als solche besonders hervorgehoben werden, — daher die Nachdrücklichkeit, mit der Vieta gegenüber den „veteres Analystae“ die „lex homogeneorum“

---

[123]) Isagoge, Cap. III, § 1:

„Si magnitudo magnitudini additur, haec illi homogenea est.
Si magnitudo magnitudini subducitur, haec illi homogenea est.
Si magnitudo in magnitudinem ducitur, quae fit huic et illi heterogenea est.
Si magnitudo magnitudini adplicatur, haec illi heterogenea est.
Quibus non attendisse causa fuit multae caliginis et caecutiei veterum Analystarum“. (Vgl. weiter unten S. 234, Anm. 216.)

[124]) Theon (Hiller) 73, 18f.: τὰ μὲν γὰρ ἀνομογενῆ πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλά φησιν Ἄδραστος εἰδέναι ἀδύνατον — vgl. S. 178, Anm. 118.

[125]) Mittelbar freilich ist die Vieta'sche „lex homogeneorum“ mit dem Satz des Adrast insofern identisch, als jede Proportion, deren Verhältnisse diesem Satz bzw. der Euklidischen Definition 3 des 5. Buches genügen, in eine Gleichung überzuführen ist, die die Vieta'sche Forderung erfüllt. Eben dies mag Vieta bei seiner Berufung auf Adrast vorgeschwebt haben, mit anderen Worten: er betrachtet die Verhältnis- und Proportionenlehre von vornherein von der als „Rechenkunst“ verstandenen Gleichungslehre aus (vgl. S. 180, Anm. 121, den Begriff des „Analogismus“ und S. 163 ff.).

[126]) Vieta selbst sagt Cap. VIII, § 17: „In numeris homogenea comparationum sunt unitates“.

als das Fundament der „analytischen Kunst“ herausstellt (vgl. auch Cap. I, Schluß und Cap. V, § 4). Sie zeigt, daß der Begriff der species für Vieta — trotz seiner „Universalität“ — in unaufhebbarer Abhängigkeit vom Begriff der „Anzahl“ steht. Der Charakter des „ἀριθμός“ als einer „Anzahl von ...“ ist in ihm in eigentümlich abgewandelter Weise erhalten. Während jeder ἀριθμός unmittelbar die Dinge bzw. die Einheiten selbst meint, deren „Anzahl“ er gerade darstellt, meint zunächst einmal das Buchstaben-Zeichen bei Vieta eben diesen Begriff der Anzahl als einer auf Dinge bzw. Einheiten unablöslich bezogenen Bestimmung, meint also unmittelbar den allgemeinen Anzahl-Charakter jeder möglichen Anzahl, d. h. die „Anzahl überhaupt“, und nur mittelbar die Dinge bzw. die Einheiten, die in der jeweiligen Anzahl vorliegen mögen. In der Sprache der Schule läßt sich dieser Sachverhalt so ausdrücken: mit dem Buchstaben-Zeichen wird der intentionale Gegenstand einer „intentio secunda“ bezeichnet, nämlich eines Begriffs, der selbst unmittelbar einen Begriff und nicht ein Seiendes meint. Darüber hinaus — und dies erst bringt die entscheidende Wendung — wird aber nun diesem allgemeinen Anzahl-Charakter oder, was dasselbe ist, dieser „allgemeinen Anzahl“ in ihrer Unbestimmtheit, d. h. ihrer nur möglichen Bestimmtheit, eine gewisse Eigenständigkeit verliehen, die sie zum Träger „rechnerischer“ Operationen zu machen erlaubt. Dies geschieht durch die Hinzufügung der „Stufen“-Bezeichnungen, deren nach eindeutigen Regeln vorzunehmende Verknüpfung das homogene Feld angibt, das der jeweils aufzustellenden Gleichung zu Grunde liegen soll[127]). Die „Stufen“-Bezeichnung — die für sich allein dem Diophantischen εἶδος entspricht — verwandelt also den Gegenstand der intentio secunda, nämlich die vom Buchstaben-Zeichen gemeinte „allgemeine Anzahl“, in den Gegenstand einer intentio prima, nämlich in ein dem unmittelbaren Zugriff zugängliches „Seiende“, dem im Bereich des gewöhnlichen Rechnens z. B. „zwei Monaden“, „drei Monaden“ usw. entsprechen. Das bedeutet aber, daß das „Sein“ der species bei Vieta, also das „Sein“ der Gegenstände der allgemeinen Analytik, weder als ein eigenständiges — im pythagoreisch-platonischen Sinne —, noch als ein ἐξ ἀφαιρέσεως gewonnenes „reduziertes“ — im aristotelischen Sinne —, sondern als

[127]) Die „Stufe“ dieses Feldes ist durch die höchste „Stufe“ der „scalaren“ Größen (also den höchsten Exponenten bzw. den Grad der Gleichung) bestimmt, die „potestas“ genannt wird. Die niederen Stufen heißen „gradus parodici ad potestatem“ (Cap. III, § 5 — irrtümlich als § 8 bezeichnet). Der höchsten Stufe der „scalaren“ Größen entspricht die Gattung derjenigen bekannten Größe, die als selbständiges Glied der Gleichung auftritt und die demnach die „Einheit“ des betreffenden homogenen Feldes, das „homogeneum comparationis“ darstellt (Cap. VIII, § 16).

ein „symbolisches“ zu verstehen ist. Die species sind in sich selbst symbolische Gebilde: Gebilde nämlich, deren nur mögliche Gegenständlichkeit als faktische Gegenständlichkeit verstanden wird. Sie sind als solche nur innerhalb der symbolischen Formelsprache faßbar [128]), wie sie erstmalig bei Vieta in voller Ausprägung zu Tage tritt und die allein das „Finden des Findens“, d. i. die „Zetetik“, darzustellen erlaubt. Damit erst wird das wichtigste Werkzeug der mathematischen Naturwissenschaft: die mathematische „Formel“ möglich (vgl. S. 174f., Anm. 110) [129]). Vor allem wird damit erstmalig eine neue Bahn des „Verstehens“ beschritten, wie sie der antiken ἐπιστήμη nicht zugänglich war.

Wenn wir, rückblickend auf den pythagoreisch-platonischen Begriff des εἶδος einer Anzahl, das überhaupt erst das einheitliche Sein der betreffenden Anzahl ermöglicht (vgl. Teil I, S. 60f.), mit diesem oben entwickelten Begriff der „species“ vergleichen, so dürfen wir sagen, daß die ontologische Eigenständigkeit des εἶδος — auf dem Umwege über seine instrumentale Verwendung bei Diophant (vgl. S. 147f. u. 177) — hier endlich eine symbolische Verwirklichung findet. Damit ist eine allgemeine begriffliche Wandlung angezeigt, die sich auf das Ganze der modernen Wissenschaft erstreckt. Sie betrifft zunächst und vor allem den Begriff der Anzahl selbst.

Indem die „allgemeine Anzahl“ im Medium der species als in sich gegenständliches Gebilde, d. h. symbolisch begriffen und symbolisch dargestellt wird, entsteht der moderne Begriff der „Zahl“. Man pflegt gemeinhin zur Erklärung seiner Entwicklung von seiner immer größer werdenden „Abstraktheit“ zu reden. Aber diese billige und mißverständliche Redeweise läßt seine eigentliche und komplizierte Struktur ganz im Dunklen. Der moderne Begriff der „Zahl“, wie er dem symbolischen Rechenverfahren zu Grunde liegt, ist in sich selbst — wie das von ihm Gemeinte — symbolischer Natur: er ist mit dem Vieta'schen Begriff der species identisch. Besonders deutlich tritt dies an der species 1. Grades in Erscheinung, wo die Bezeichnung der „Stufe“ dem Buchstaben-Zeichen nicht beigefügt wird und also gleichsam mit ihm zusammenfällt. In einem isolierten Buchstaben-Zeichen „*A*“ oder „*B*“ eine „Zahl“ zu erblicken, ist aber offen-

[128]) Der Terminus „Symbolum“ für die Buchstabenzeichen (und auch Verknüpfungszeichen) stammt von Vieta selbst (vgl. Cap. V, § 5 und Cap. IV passim). — Vgl. ferner in der epistola dedicatoria die Bestimmung des circuitus als des „verum et vere physicum symbolum perpetuitatis“ und andererseits oben S. 165, Anm. 98, Ende.

[129]) Der Ausdruck „formula“ in der heutigen Bedeutung tritt allerdings erst viel später auf: so versteht z. B. noch Adr. Metius, Arithmeticae et geometriae practica, 1611, p. 64ff., unter „formula operationis“ das ohne erklärenden Text vorgeführte Rechenschema.

sichtlich nur von den Verknüpfungsregeln aus möglich, wie sie Vieta im 4. Kapitel der „Isagoge“ — in Abhebung von den Operationsregeln der „logistice numerosa“ — angibt. So stellen diese Regeln die erste moderne Axiomatik dar: erst deren systematischer Zusammenhang „definiert“ den Gegenstand, auf den sie bezogen sind. Aber dennoch — und dies ist der Keim der künftigen Schwierigkeiten — sind diese Regeln am „Rechnen“ mit Anzahlen von Monaden direkt abgelesen. Das bedeutet: daß die species in abgewandelter Weise den Anzahl-Charakter beibehält und damit zur „Zahl“, nämlich zum Gegenstand „rechnerischer“ Operationen wird, ist in letzter Instanz nur möglich, weil auch die antiken „Anzahlen von Monaden“ selbst als „Zahlen“ interpretiert, d. h. von der symbolischen Darstellung aus verstanden werden. Diese Interpretation ist bis heute die Grundlage unseres Verständnisses der antiken „Arithmetik“ und „Logistik“ geblieben“[130]).

So kommt es, daß sowohl nach Vieta und unter seinem unmittelbaren Einfluß wie auch bereits vor ihm die „numeri algebraici“ (oder „algebrici“ bzw. „cossici“) den „numeri simplices“ (oder „vulgares“) zur Seite gestellt werden[131]). Wir werden dies noch besonders bei Stevin zu betrachten haben. Bezeichnend ist hierfür auch die Stellungnahme von Bachet de Meziriac, des ersten Herausgebers Diophants, der in seinen Kommentaren zu den „Definitionen“ (vgl. S. 147, Anm. 52) III—VIII des Prooemiums der Diophantischen „Arithmetik“ gegen die Auffassung Xylanders und dessen Vorbildes, des Scholiasten Maximus

[130]) Sie wird von dem seit dem 12. Jahrh. im Abendlande sich einbürgernden „arabischen“ Ziffern- und Positionssystem getragen, dessen „Zeichen“-Charakter viel ausgeprägter als der der griechischen oder gar römischen Schreibweise ist. Aber es wäre verfehlt, die Entstehung der symbolischen Formelsprache als letzte Konsequenz der Rezeption dieser arabischen Zeichensprache begreifen zu wollen. Die Rezeption dieser Zeichensprache im Abendlande setzt ihrerseits einen allmählichen Wandel im Anzahl-Verständnis voraus, dessen letzte Wurzeln in tieferen Schichten liegen, als daß sie in dieser Arbeit Gegenstand der Betrachtung werden könnten.

[131]) Was die Mathematiker vor Vieta betrifft, vgl. vor allem Chuquet, Bull. Boncompagni XIII, 1880, S. 737, wo er vom „nombre“ sagt, daß dieser „est pris Icy [d. i. im „Triparty“] largement“: als „nombres“ sind hier zu verstehen nicht nur die Eins und die Brüche („tont nombre rout“), sondern auch die durch eine „denominacion“ (nämlich einen ganzzahligen Exponenten) ausgezeichneten Größen, die bei Chuquet an die Stelle der „cossischen“ treten (— wobei eben bemerkenswerterweise die gewöhnlichen nombres die denominacion 0 erhalten und die Reihe der cossischen Größen ins Unendliche erweitert wird); ferner Gosselin, a. a. O., Vorrede p. ã iiij r: „. . . operae precium quoque fuit et numeros quos vocant Cossicos demonstrare“ (dagegen Cap. V, p. 4r: „Numerus in hac arte dicitur omnis quantitas, quam monadibus conflatam intelligimus absque ullo nomine“ [sc. „latus“, „quadratum“ etc.]. Unter die so bestimmten „numeri“ fallen aber auch „Brüche“ und „irrationale Zahlen“ — s. weiter unten S. 205, Anm. 175); ferner Raimarus Ursus, das Zitat S. 179, Anm. 118.

Planudes (vgl. S. 146 und 152), polemisiert. Nach Bachet (Ausgabe von 1621, S. 6 f.) spricht hier Diophant nicht von den „absoluten Zahlen und Brüchen“ (de numeris et fractionibus absolutis), was der Richtung seiner Betrachtung gänzlich fern liege (quod a scopo illius prorsus alienum est), sondern allein von den species als solchen bzw. den „fractiones algebricae“. So deutet Bachet insbesondere die „Def. VI“, wonach ein εἶδος bei der Multiplikation mit der Eins dasselbe εἶδος bleibt, — weil nämlich die Multiplikation mit der Eins jede Anzahl und folglich auch ihr εἶδος unverändert läßt (vgl. S. 146 f.; 148) —, dahin, daß sich die jeweilige species durch die Multiplikation mit beliebig vielen Einsen, d. h. mit gewöhnlichen Zahlen, nicht verändert. Er gibt dazu noch eine Erläuterung, und zwar unter vorsichtiger Berufung auf Diophant selbst: so wie die Multiplikation einer gewöhnlichen Zahl mit der Eins ebendieselbe Zahl liefere, so erzeuge die Multiplikation einer species mit beliebig vielen Einsen, d. h. einer gewöhnlichen Zahl, ebendieselbe species [132]). Man erkennt deutlich, daß es sich für Bachet hier um zwei „Zahl“-Bereiche handelt: die Rolle der Eins im gewöhnlichen „Zahl“-Bereich weist er der gewöhnlichen „Zahl“ im algebraischen Bereich zu. Das heißt aber, daß für Bachet die Eins selbst nicht so sehr den elementaren Bestandteil jeder „Anzahl“ als einen „numerischen Koeffizienten“ bedeutet [133]). Nicht minder bezeichnend für die neue Auffassung der „Zahl“ und der „Eins“ ist auch die Art, in der Bachet das Diophantische Zeichen $\overset{\circ}{M}$ der bekannten Anzahlen (vgl. S. 136) für überflüssig erklärt: „Ecquis enim cum audit numerum 6. non statim cogitat sex unitates? Quid ergo necesse est sex unitates dicere, cum sufficiat dicere, sex?“ (a. a. O., S. 4) [134]). Dieser Unterschied des „dicere“ und des „cogitare“, wie ihn die Antike zwar in der Praxis häufig genug, aber gerade grundsätzlich nicht kennt [135]), schlägt sich in der symbolischen Zeichenschrift nieder und gilt wie für die algebraische Formelsprache so auch für die Darstellung im Bereich der Anzahlen selbst: die „An-

[132]) „Causam autem assignare videtur [sc. Diophantus], quod unitates absolutae, unitatis ipsius naturam sapiant. Quemadmodum ergo unitas in quamlibet numerum ducta, producit ipsum eundem numerum, sic et unitates in quamlibet speciem multiplicatae, eandem speciem gignunt“ (a. a. O., S. 7).

[133]) Bekanntlich stammt der Terminus „Koeffizient“ von Vieta selbst, welcher von der „magnitudo coefficiens“ spricht, d. i. einer bekannten Größe von bestimmter „Gattung“, die, einer „skalaren“ Größe „sub parodico ad potestatem gradu“ (vgl. S. 182, Anm. 127) beigefügt (adscita), diese zu einer species homogenea macht, d. h. in die Dimension der „potestas“ erhebt („Isagoge“, Cap. III, § 6 — irrtümlich als § 9 bezeichnet).

[134]) Tannery folgt dem Beispiel Bachet's: vgl. seine Diophant-Ausgabe, Bd. I, S. 7, Anm.: „nullo signo pro unitate in versione utemur“.

[135]) vgl. Teil I, S. 41, Anm. 3; S. 74, Anm. 1; ferner oben S. 136 f.

zahlen“ werden nun als „gewöhnliche Zahlen“ begriffen und fallen im durchschnittlichen, d. h. für die faktische Begriffsbildung durchaus maßgeblichen Verständnis, vor allem im Vollzuge der jeweiligen Rechenoperationen, mit den „Zahl“-Zeichen als solchen zusammen. —

Der neue „Zahl“-Begriff, der bereits — wenn auch nicht explizit — die algebraischen Darstellungen und Forschungen von Stifel, Cardan, Tartaglia usf. leitet[136]), rechtfertigt nun auch die Rede von den „Brüchen“ als „nicht ganzen rationalen Zahlen“, von „irrationalen“ Zahlen usf.[137]). Endlich wird von diesem „Zahl“-Begriff aus der für die Antike grundlegende Unterschied zwischen den „stetigen“ geometrischen Größen und den in „diskrete“ Einheiten aufteilbaren Anzahlen (vgl. Teil I, S. 24 und 58) verwischt, was erst die von Vieta mit so großer Meisterschaft gehandhabten Approximationsmethoden[138]) in ihrem „wissenschaftlichen“ Sinn zu verstehen erlaubt. Auf diese Konsequenzen des symbolischen Zahlbegriffs werden wir noch im letzten Paragraphen einzugehen haben.

### 3. Die Interpretation der καθόλου πραγματεία als Mathesis universalis im Sinne der „ars analytice“.

Die als algebraische „Zahl“ zu begreifende species bildet also den Gegenstand der „logistice speciosa“, deren sich die „Zetetik“ zu bedienen hat. Ein specimen der „logistice speciosa“ bieten die „Zeteticorum libri quinque“ (1593): sie werden von Vieta unmittelbar der Diophantischen „Arithmetik“ gegenübergestellt, die sich ja nach seiner Meinung nur zu sehr in den Grenzen der „logistice numerosa“ hält. Um die Parallelität beider Werke zu betonen, beschließt Vieta das 5. Buch der „Zetetik“ mit eben demselben Problem, das den Ab-

[136]) vgl. S. 151 und S. 184, Anm. 131, auch S. 179, Anm. 118.

[137]) Im „Univ. Insp. ad Can. math. liber sing.“ nennt Vieta (z. B. Tafel 5) die unechten Brüche „monades non purae“, später heißen die Brüche bei ihm einfach „numeri fracti“ (z. B. „De num. pot. ad Ex. resol.“, 1600, S. 7 = ed. van Schooten, S. 173). „Irrationale“ Zahlen nennt er auch — in Anlehnung an die antike Terminologie — „numeri asymmetri“, im Gegensatz zu den „numeri symmetri“, d. h. „rationalen“ Zahlen (ebda). Im Hinblick auf irrationale Zahlen führt er im „Univ. Insp. ad Can. math. liber sing.“, Taf. 14, unter dem Titel „Analogia generalior in numeris irrationalibus“ folgende bei einem Näherungsverfahren zu berücksichtigenden Bezeichnungen ein: „numerus fere“, „id est, dum excedit iustum“ und „numerus et amplius“, „dum deficit a iusto“ (vgl. Aristoteles, Metaph. Δ 15, 1021 a 7: καὶ ἔτι). Aber er kennt — wie Diophant — keine „negativen“ Zahlen, und zwar schon darum nicht, weil sie sich in der geometrischen „Exegetik“ nicht repräsentieren lassen, die Parallelität der geometrischen und der arithmetischen Analysis aber immer gewahrt bleiben muß.

[138]) Vor allem in der Schrift „De numerosa potestatum ad Exegesin resolutione“ (vgl. Ritter, S. 383ff.; Cantor II², 640f.). Im 18. Kapitel des „Var. de reb. math. resp., liber VIII“ gibt Vieta bei der Berechnung von $\pi$ das erste Beispiel einer unendlichen (und zwar konvergenten) Faktorenfolge (vgl. Cantor II², 594f.; Ritter, S. 410f.).

schluß des 5. Buches der Diophantischen „Arithmetik“ bildet („... Retulit Diophantus quaestione ultima libri V. Quare et Zeteticorum quintus noster finem hic accipito“). Er übernimmt auch sonst eine Reihe von Aufgaben aus dem Diophantischen Werk und beruft sich in den Lösungen von IV, 1—3 ausdrücklich auf die „Analysis Diophantaea“. — Aber wir dürfen nicht vergessen, daß die zetetische Analysis zugleich die „allgemeine“ analytische Kunst darstellt, die jenseits des Gegensatzes von „Geometrie“ und „Arithmetik“ steht und also der Diophantischen „Arithmetik“ übergeordnet ist. Wir dürfen nicht vergessen, daß die species — und zwar in ihrem Charakter als „Zahl“ — zugleich auch den Gegenstand dieser „allgemeinen“ Analytik abgibt. Dies gerade macht den entscheidenden Unterschied zwischen der Vieta'schen Konzeption einer „allgemeinen“ mathematischen Disziplin und der antiken Idee einer καθόλου πραγματεία aus. Der „Zahl“-Charakter der species verleiht dieser πραγματεία — unter Aufrechterhaltung ihrer Stellung im System des „Wissens“ — einen ganz neuen Sinn. —

Für die antike Wissenschaft standen die „allgemeinen“ Sätze — die Axiome einerseits und die Sätze der allgemeinen Proportionenlehre andererseits — im engsten Zusammenhang mit dem Thema der „obersten“ Disziplin, mochte diese platonisch als „Dialektik“ oder aristotelisch als „erste Philosophie“ bezeichnet werden. Für Aristoteles bilden sie nicht bloß das ständige Beispiel für die Art, in der die πρώτη φιλοσοφία von dem ihr eigentümlichen Thema handelt (vgl. oben S. 162f. u. 166), sondern sie gehören unmittelbar zu diesem ihrem Thema selbst. Er stellt und bejaht die Frage, ob die Untersuchung des „Seins“ und die Untersuchung der mathematischen Axiome einer einzigen Wissenschaft zuzuweisen seien, nämlich der πρώτη φιλοσοφία als solcher (Metaph. Γ 3, 1005 a 19—22: Λεκτέον δὲ πότερον μιᾶς ἢ ἑτέρας ἐπιστήμης περί τε τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι καλουμένων ἀξιωμάτων [vgl. An. post. A 10, 76 b 14 f.] καὶ περὶ τῆς οὐσίας. φανερὸν δὴ ὅτι μιᾶς τε καὶ τῆς τοῦ φιλοσόφου καὶ ἡ περὶ τούτων ἐστὶ σκέψις — vgl. a 28 f.: τοῦ περὶ τὸ ὂν ᾗ ὂν γνωρίζοντος καὶ περὶ τούτων ἐστὶν ἡ θεωρία). Während der Mathematiker von den „allgemeinen“ Sätzen im Hinblick auf die ihm jeweils vorliegenden Gegenstände Gebrauch macht, hat es der „Philosoph“ mit diesen ursprünglich zu tun, d. h. gerade nicht sofern sie an Linien oder Winkeln oder Anzahlen abzulesen sind, sondern sofern sie allem Zählbaren und Meßbaren schlechthin gemeinsam sind und folglich dieses Zählbare und Meßbare (und Wägbare) in ihrem generischen Seinscharakter als „Quantitatives“ bestimmen (vgl. Metaph. K 4, 1061 b 17 ff.: ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ μαθηματικὸς χρῆται τοῖς κοινοῖς ἰδίως, καὶ τὰς τούτων ἀρχὰς ἂν εἴη θεωρῆσαι τῆς πρώτης φιλοσοφίας — das wird hier an dem Sachverhalt „ἀπὸ τῶν ἴσων ἴσων ἀφαιρεθέντων ἴσα τὰ λειπόμενα“

aufgezeigt, der ein solches κοινὸν ἐπὶ πάντων τῶν ποσῶν darstellt — vgl. An. post. A 10, 76 b 20 f.; A 11, 77 a 30 f.; Euklid I, κοιν. ἔνν. 3). Ebenso fragt Proklus — mit Rücksicht auf diese aristotelische Lehrmeinung und unter besonderer Hervorhebung der allgemeinen Proportionenlehre — wer denn, gegenüber dem „Geometer" und dem „Arithmetiker", die etwa den Satz, daß eine Proportion durch Vertauschung der inneren Glieder nicht aufgehoben wird (ὅτι ἀνάλογον καὶ τὸ ἐναλλάξ — vgl. oben S. 163), einerseits an geometrischen Größen und andererseits an Anzahlen demonstrieren (in Eucl. 9, 2—8), diesen Satz bzw. eine solche Vertauschung als „allgemeine" Sachverhalte „in sich selbst" betrachte (9, 8 f.: τίς οὖν ὁ καθ' ἑαυτὸν γνωρίζων τὸ ἐναλλὰξ εἴτε ἐν μεγέθεσιν εἴτε ἐν ἀριθμοῖς . . .;). Seine Antwort lautet (9, 14 ff.): diese Betrachtungsart sei Sache einer selbständigen Wissenschaft, die jenen anderen, der Geometrie und der Arithmetik, bei weitem übergeordnet sei (πολλῷ πρότερον ἡ ἐκείνων γνῶσις ἐστὶν ἐπιστήμη — vgl. 8, 24—26), und der Aufstieg von den „partiellen" Erkenntnissen zu den „allgemeinen" (ἄνοδος ἀπὸ τῶν μερικωτέρων [sc. γνώσεων] ἐπὶ τὰς ὁλικωτέρας) erstrecke sich hier bis zur Wissenschaft des „Seins" selbst hin (ἕως ἂν ἐπ' αὐτὴν ἀναδράμωμεν τὴν τοῦ ὄντος, ᾗ ὄν ἐστιν, ἐπιστήμην). Diese Worte des Proklus haben insofern eine gewaltige Bedeutung erlangt, als sie im 16. und 17. Jahrh. zunächst durch die Edition des Euklid-Kommentars von Grynaeus (1533), dann vor allem durch die Übersetzung desselben von Barocius (1560) eine sehr große Verbreitung fanden und durchweg im Sinne eines Hinweises auf die Mathesis universalis verstanden wurden. Denn von eben jener „übergeordneten" Wissenschaft sagt Proklus (7, 18 f. — vgl. oben S. 163), daß sie alle mathematischen Erkenntnisse in eins zusammenfasse (τὰ κοινὰ . . . θεωρήματα καὶ ἁπλᾶ καὶ τῆς μιᾶς ἐπιστήμης ἔγγονα τῆς πάσας ὁμοῦ τὰς μαθηματικὰς γνώσεις ἐν ἑνὶ ἐπεχούσης... — Barocius: „communia . . . Theoremata, et simplicia, et ab una scientia orta, quae cunctas simul Mathematicas cognitiones in unum continet . . . "), und Barocius fügt als Marginal-Bemerkung — sowohl an dieser wie auch an anderen Stellen — ausdrücklich die Worte: „Divina scientia" hinzu. Er stützt sich hierbei offensichtlich auf die später (20, 5 f.) folgenden Worte des Proklus: „. . . τὴν περὶ θεῶν ἀλήθειαν καὶ τὴν περὶ τῶν ὄντων θεωρίαν ἐν τοῖς οἰκείοις ἐκφαίνει λογισμοῖς"[139]). — Es ist nun bezeichnend, daß

[139]) Proklus selbst ist freilich der Meinung, daß diese μία καὶ ὅλη μαθηματική (44, 2 f.) nur ἐφάπτεται τῆς τῶν πρώτων θεωρίας (19, 24). Sie stelle den σύνδεσμος τῶν μαθημάτων dar, von dem in der „Epinomis" die Rede sei (vgl. Epin. 991 E f.), und umfasse nicht bloß — wie Eratosthenes meinte — die allgemeine Proportionenlehre, sondern eben alle „allgemeinen" mathematischen Bestimmungen, d. h. auch alle „Axiome" der Mathematik (43, 22 ff. — vgl. 195, 24 ff.). Einen noch höheren Rang nehme die „Dialektik" ein, der θριγκός aller Wissenschaften (vgl. Plato, Staat 534 E), den höchsten Rang endlich ὁ νοῦς αὐτός (42—44; vgl. 9, 19—23).

bereits 1577 Gosselin (a. a. O., p. 3r) die Algebra die „regina scientiarum“ und eine „divina ars“ nennt[140]). Und noch Descartes wird in seinen Überlegungen, die ihn in Pappus und Diophant die Spuren einer „wahren Wissenschaft“ erkennen lassen (vgl. S. 158, Anm. 87), unmittelbar an den im Euklid-Kommentar des Proklus durchgeführten Gedankengang erinnert. Er fragt in den „Regulae“ (Regula IV, Ad.-Tann. X, 377 f.), was man denn genau unter „Mathesis“ zu verstehen habe und warum die Astronomie, die Musik, die Optik, die Mechanik und andere Wissenschaften (vgl. die Aufzählung bei Proklus 38, 11 f.) als „Teile“ der Mathematik bezeichnet würden (quidnam praecise per illud nomen omnes intelligant, et quare non modo iam dictae [sc. Arithmetica et Geometria], sed Astronomia etiam, Musica, Optica, Mechanica, aliæque complures, Mathematicae partes dicantur — vgl. bei Proklus den ganzen Abschnitt 35, 17—42, 8, wo von den μέρη τῆς μαθηματικῆς die Rede ist, besonders 38, 13 ff.; 41, 4 und 24 f.; 42, 6—8). Er fährt fort, indem er offensichtlich gegen Proklus bzw. Barocius polemisiert: „Hic enim vocis originem spectare non sufficit“ (vgl. Barocius' Überschrift zu Proklus 44, 25 ff.: Cap. XV. „Mathematices nomen unde sit ortum“), „nam cum Matheseos nomen idem tantum sonet quod disciplina (vgl. Barocius: „. . . cum perspexissent [sc. Pythagorei] quidem, quod omnis quae Mathesis, hoc est disciplina appellatur, reminiscentia est . . .“ = Proklus 45, 5—7: „. . . τῶν Πυθαγορείων κατειδότων μὲν ὅτι πᾶσα ἡ καλουμένη μάθησις ἀνάμνησίς ἐστιν . . .“), non minori iure, quam Geometria ipsa, Mathematicae vocarentur“. Der aufmerksamen Betrachtung gehe schließlich auf, daß eben all das, und nur das, worin „Ordnung“ und „Maß“ (ordo et mensura) zu beobachten seien, den Gegenstand der Mathesis abgebe, daß es aber gerade nicht darauf ankomme, ob man es im einzelnen mit Zahlen, Figuren, Himmelskörpern, Tönen usf. zu tun

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, daß auch die antike Tradition hinsichtlich der allgemeinen Proportionenlehre stets die Erinnerung an den ursprünglichen Zusammenhang zwischen dieser und der Arithmetik (bzw. Logistik) bewahrt hat. So bemerkt Eutokius in seinem Kommentar zu den Conica des Apollonius, ad I, Prop. XI (Heiberg II 220): μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖχθαι τοῦτο· οἵ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηνται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι μαθηματικαῖς [im Sinne einer allgemeinen Lehre] μᾶλλον οὔσαις ἢ ἀριθμητικαῖς διὰ τὰς ἀναλογίας, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἀριθμητικόν ἐστιν. λόγοι γὰρ καὶ πηλικότητες λόγων καὶ πολλαπλασιασμοὶ τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσι καὶ δι' αὐτῶν τοῖς μεγέθεσι κατὰ τὸν εἰπόντα [nämlich Archytas, vgl. Nikomachos 7, 1 f. (Hoche) und Diels I[3], 331, 7 f.]· ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφά (vgl. dazu Teil I, S. 68, Anm. 1 und S. 28, Anm. 1; ferner §§ 3—5 und S. 67 f.).

[140]) Petrus Ramus benutzt Proklus-Barocius ausgiebig und mit großem Unverständnis für die Komposition des 3. Buches seiner „Scholae mathematicae“ — vgl. a. a. O., S. 76 ff.

habe: „ac proinde generalem quamdam esse debere scientiam [innotuit], quae id omne explicet, quod circa ordinem et mensuram nulli speciali materiae addictam quaeri potest, eamdemque, non ascititio vocabulo, sed iam inveterato atque usu recepto, Mathesim universalem nominari, quoniam in hac continetur illud omne, propter quod aliae scientiae et Mathematicae partes appellantur" (vgl. oben S. 188 die Barocius-Übersetzung von Proklus 7, 18 f.)[141]). Diese „allgemeine Disziplin" — die keine andere als die in Pappus und Diophant aufzuspürende „wahre Wissenschaft" ist — haben nun, sagt Descartes, einige Männer mit hervorragenden Verstandesgaben (quidam ingeniosissimi viri) bereits ins Leben zu rufen sich bemüht (suscitare conati sunt): „nam nihil aliud esse videtur ars illa, quam barbaro nomine Algebram vocant . . .". Descartes denkt hier zweifellos vor allem an Cardan, Tartaglia, Bombelli, ferner an Clavius, dessen „Algebra" (1608) er höchstwahrscheinlich[142]) bereits in seiner Schulzeit kennen lernte, und möglicherweise auch an Ghetaldi[142a]), Cataldi[143]) und Stevin[144]). Über sein Verhältnis zu Vieta ist bereits zu Lebzeiten Descartes' heftig gestritten worden[145]). Soviel ist jedenfalls klar:

---

[141]) Vgl. auch Regula XVI (455 f.): „. . . advertendum est, . . . nos . . . hoc in loco non minus abstrahere ab ipsis numeris quam paulo ante a figuris Geometricis, vel quavis alia re" (s. weiter unten S. 214 ff.). — Die von Proklus erwähnte ἀνάμνησις-Lehre (45, 2 ff.) klingt übrigens in den Worten Descartes' an: „prima quaedam veritatum semina humanis ingeniis a natura insita . . ." (a. a. O., S. 376); doch sind damit eher die ἔμφυτοι προλήψεις der Stoiker gemeint (vgl. weiter unten S. 208 u. 212 f., Anm. 186). Eine weitere Quelle für Descartes sind hier vielleicht auch Vanini, De admirandis naturae reginae deaeque mortalium arcanis libri IV, 1616, p. 407 (vgl. A. Espinas, Descartes de seize à vingt-neuf ans, Séances et travaux de l'académie des sciences morales et politiques, Compte rendu, 1907, S. 114 f.) sowie Ficino und Pico della Mirandolla (vgl. M. Meier, Descartes und die Renaissance, 1914, S. 26 ff.).

[142]) vgl. Descartes, Oeuvres, Adam-Tannery XII, 23 und X, 156, Anm.

[142a]) vgl. S. 192, Anm. 145, am Ende.

[143]) Folgende Werke von Cataldi kommen hier in Betracht: Trattato dell'Algebra proportionale, etc., 1610; Algebra discorsiva numerale, et lineale, etc., 1618; Regola della quantità, o cosa di cosa, 1618; Nuova Algebra proportionale, etc., 1619. — Cataldi steht selbst unter dem Einfluß Bombelli's.

[144]) Über Descartes' Verhältnis zu Stevin s. weiter unten S. 205 f., Anm. 176. — Ferner wären hier noch die deutschen Rechenmeister Faulhaber aus Ulm (vgl. S. 206, Anm. 176, Ende; S. 209 f., Anm. 183 und S. 216, Anm. 189) und Peter Roth aus Nürnberg (vgl. Descartes, Oeuvres, Ad.-Tann. X, 242) zu erwähnen.

[145]) Vgl. namentlich Descartes, Oeuvres, Ad.-Tann. I, 245; 479 f.; II, 82; 193; 524; IV, 228; V, 503 ff. — dazu Ch. Adam, Vie et oeuvres de Descartes (Bd. XII der éd. Ad.-Tann.), S. 211 ff., der allerdings Vieta nicht gerecht wird, und G. Milhaud, Descartes savant, 1921, S. 244 ff. —

Der Streit um die Beziehung Descartes' zu Harriot (vgl. Ad.-Tann. II, 456 und 457 ff.) ist insofern gegenstandslos, als Harriot selbst in allem Wesentlichen von Vieta abhängig ist, was den Zeitgenossen Descartes' allerdings kaum noch bewußt gewesen

mag Descartes in keiner Weise bewußt an Vieta anknüpfen, die „all-

---

zu sein scheint. Walter Warner, der Harriot's Werk: „Artis Analyticae Praxis, Ad aequationes Algebraicas nova, expedita, et generali methodo resolvendas, etc.", 1631 herausgab (s. weiter unten S. 225, Anm. 199), hebt zwar in der Vorrede die Bedeutung Vieta's für die Begründung der „analytischen Kunst" gebührend hervor: „Dum vero ille [sc. Vieta] veteris Analytices restitutionem, quam sibi proposuit, serio molitus est, non tam eam restitutam, quam proprijs inuentionibus auctam et exornatam, tanquam nouam et suam, nobis tradidisse videtur" (vgl. oben S. 157 u. S. 155, Anm. 79); er räumt aber zugleich Harriot eine weit größere Rolle in der Ausgestaltung dieser Disziplin ein, als sie ihm in Wirklichkeit zukommt. Harriot, der die ganze Terminologie Vieta's übernimmt, unterscheidet (p. 2, Def. 6—7; ferner p. 3, Def. 11) folgerichtig nur zwei Teile der „Analytik": die „Zetetik" (als die analysis bzw. resolutio logica sive discursiva) und die „Exegetik" (als die analysis bzw. resolutio operativa) (vgl. oben S. 170—175). Was die Poristik anbetrifft, so gibt er in der Def. 8 eine an die entsprechende Bestimmung bei Vieta (s. S. 170, Anm. 104) anknüpfende Erläuterung derselben, die ziemlich unverständlich ist, die Poristik aber jedenfalls aus der systematischen Gliederung der „Analytik" auszuschließen erlaubt, womit also endgültig die Unterscheidung zwischen „Theorem" und „Problem" fallen gelassen wird (vgl. S. 170). Die „Exegetik" ist bei Harriot — wie bei Vieta — selbst doppelter Art, nur daß er die zwiefache Möglichkeit der Lösung, die „arithmetische" und die „geometrische" (vgl. S. 172; 173 f.), von den beiden Arten der „Logistice", der „numerosa" und der „speciosa", her versteht (Def. 9). So legt er den Grund für das spätere Mißverständnis, wonach die species bei Vieta „geometrische" Gebilde bedeuten sollen (vgl. S. 178): er ist weit davon entfernt, der „logistice speciosa" und damit der „Analytik" überhaupt jene fundamentale Stellung einer „allgemeinen", Arithmetik und Geometrie umfassenden, Disziplin zuzuweisen, die sie bei Vieta innehat. (Harriot scheint auch nicht mehr die Diophantische Herkunft des Vieta'schen Terminus „species" zu kennen, den er „ex usu forensi" herleiten zu müssen glaubt [p. 1, Def. 1], wobei allerdings zu berücksichtigen ist, daß manches im Text der „Artis Analyticae Praxis" vom Herausgeber Warner stammen mag. Auch Wallis ist übrigens dieser Meinung: vgl. dessen „Algebra", Opera II, 1693, p. 70.) Die „Exegetice speciosa" bleibt für Harriot daher auf lineare und quadratische Gleichungen beschränkt (vgl. S. 173, Anm. 109). Er selbst behandelt in seinem Werk nur die „Exegetice numerosa" (p. 3, Def. 10: „Peculiaris est Exegetices huius [sc. numerosae] ars, regulis suis et praeceptis ad praxim instructa, quae in praesenti tractatu, qui totus Exegeticus est, traduntur"). Und von dieser „numerischen Exegetik" (die genau genommen der Vieta'schen „Rhetik" entspricht — vgl. S. 172, Anm. 105) sagt Warner in seiner Vorrede, sie habe durch Harriot eine so neue Gestalt gewonnen, daß, wenn Vieta durch die Erfindung der Exegetik (Exegetices inventione — vgl. S. 169, Anm. 103 und S. 171, Schluß der Anm. 104) gewissermaßen eine neue Analytik geschaffen habe, Harriot durch die Verbesserung der Exegetik (Exegetices recognitione) gleichsam einen „neuen Vieta" hervorgebracht habe, was nämlich die Sicherheit und Bequemlichkeit in der Handhabung dieser Kunst betreffe. In der Tat hat Harriot durch Vereinfachung der Schreibweise die „numerische Exegetik" noch vor Descartes in ein wirklich brauchbares „Recheninstrument" verwandelt (eine „ars Mathematicarum omnium instrumentaria", wie Warner sagt), was sie bei Vieta in diesem Maße eben noch nicht gewesen ist. Aber dieser Vorteil wird bei Harriot durch die Vernachlässigung des Grundsätzlichen erkauft: das symbolische Rechenverfahren ist ihm bereits „selbstverständlich". Die Vereinfachung der Exegetik forderte vor allem eine Veränderung der „logistice speciosa" in dem Sinne, daß die

gemeine Albgebra", die ihm hier vorschwebt[146]), ist eben jene „neue" und „reine" Algebra, wie sie von Vieta als „allgemeine analytische Kunst" erstmalig begründet wurde. Der universale Charakter der Vieta'schen Analysis ist denn auch mit Recht von van Schooten in seinen Anmerkungen zur „Isagoge" betont worden (vgl. seine Vieta-Ausgabe von 1646, S. 545 f.). Er versteht sie als die allgemeine „doctrina quantitatis", als die „universa Mathesis" im Sinne Descartes': „id omne, quod sub contemplationem Matheseos cadit, quantitatis nomine semper gaudet, illudque demum per aequalitatem aut proportionem elucescit. Ita ut hoc ipso nomine Vietaea Analysis habenda sit quam maxime universalis"[147]). Diese universale Wissenschaft Vieta's, die in seinen und seiner Zeitgenossen Augen die vollkommene Verwirklichung der antiken καθόλου πραγματεία, der „allgemeinen Proportionenlehre" darstellt, trägt aber nun — wie wir gesehen haben — von sich aus numerische Züge: ihr Gegenstand ist trotz seiner Allgemeinheit „arithmetisch" bestimmt. Wie einst Plato die „oberste" Wissenschaft „arithmologisch" zu fassen versuchte und damit zugleich die dem λόγος gesetzten Schranken durch-

umständliche Kennzeichnung der species durch die bloße Buchstaben-Symbolik (die „sola literalis notatio", wie Warner sagt) ersetzt wurde. Damit gab aber Harriot auch das Fundament der Vieta'schen Analytik, nämlich die „lex homogeneorum", preis (vgl. S. 180 f. und weiter unten S. 229 ff.). Das symbolische Verfahren wird von da an sich selbst undurchsichtig, — was insbesondere auch von der späteren „geometrischen" Analysis Descartes' gilt.

(Harriot's Werk waren bereits 1630 die 5 Bücher „De resolutione et compositione mathematica" von Marino Ghetaldi vorausgegangen — übrigens ebenfalls als „Opus posthumum" erschienen [angekündigt bereits in der „Variorum problematum collectio", 1607; Ghetaldi stirbt 1627] —, die in ähnlicher Weise auf Vieta's Analytik beruhen, ohne deren Voraussetzungen und Grundsätze zu teilen. Auch für Ghetaldi ist die „lex homogeneorum" nicht mehr maßgebend. Bemerkenswert ist, daß Ghetaldi den Unterschied zwischen der „theoretischen" und der „problematischen" Analysis, wie ihn Pappus bestimmt [vgl. S.159 , Anm. 90], richtiger als Vieta wiedergibt. Doch macht auch er von diesem Unterschied faktisch gar keinen Gebrauch. Wesentlich ist für ihn — wie für Descartes — nur, daß die algebraische Berechnung den Weg anzeigt, auf dem die Lösung [bzw. der Beweis] jeweils gewonnen wird: „etenim Resolutio procedens per species immutabiles, non autem per numeros mutationi, quacunque operatione tractentur, obnoxios, sua vestigia clara relinquit, per quae non est difficilis ad compositionem reditus" — vgl. S. 173, Anm. 106.)

[146]) vgl. die Äußerung seines Freundes Beeckman, die aus derselben Zeit wie die „Regulae" stammt (Ad.-Tann. X, 333): „Dicit idem [d. i. Descartes] se invenisse Algebram generalem . . .".

[147]) Van Schooten verweist in diesem Zusammenhang natürlich auch auf Descartes' „Discours de la méthode", Ad.-Tann. VI, 551: „. . . advertebam, illas [sc. particulares scientias Mathematicae], etiamsi circa diversa objecta versarentur, in hoc tamen omnes convenire, quod nihil aliud quam relationes sive proportiones quasdam, quae in iis reperiuntur, examinent" (franz. Text ebda. S. 20).

brach (vgl. Teil I, § 7 C), so führt hier die „arithmetische“ Deutung der „allgemeinen Größen“ zu einer besonderen, zur „algebraischen“ Erkenntnisweise, genauer: zum Entwurf einer symbolischen Mathematik. Erst der Folgezeit gelingt es, diesem Entwurf einen festen Dahmen und eine innere Geschlossenheit zu geben, die auch noch Descartes' „Mathesis universalis“ entbehrt. Auch bei Descartes ist die Algebra als „Mathesis universalis“ in erster Linie eine „ars inveniendi“ und damit vor allem eine „praktische“ Kunst[148]). Doch gewinnt sie bei ihm bereits eine innere und äußere Selbständigkeit, wie sie die Vieta'sche allgemeine „Analytik“ nicht besaß (vgl. S. 175 f.). Vor allem war es erst Descartes — und darin besteht seine gewaltige Rolle in der Entstehungsgeschichte der modernen Wissenschaft —, welcher der „Algebra“, dieser „ars magna“, eine fundamentale Stellung im System des Wissens überhaupt zuwies[149]). Von nun an tritt an die Stelle der antiken ontologi-

[148]) vgl. S. 175 f. — S. auch den Brief Descartes' vom März 1637 an Mersenne (Ad.-Tann. I, 349): „. . . ie ne mets pas Traité de la Methode, mais Discours de la methode, ce qui est le mesme que Preface ou Aduis touchant la Methode, pour monstrer que ie n'ay pas dessein de l'enseigner, mais seulement d'en parler. Car comme on peut voir de ce que i'en dis, elle consiste plus en Pratique qu'en Theorie . . .“ (vgl. Ad.-Tann. I, 370).

[149]) Dies geschieht mit aller Klarheit in den „Regulae ad directionem ingenii“, die etwa ins Jahr 1628 fallen. In den späteren Schriften Descartes' wird diese Basis seines ganzen Systems immer mehr verhüllt. — In der Reg. IV (Ad.-Tann. X, 374) sagt Descartes bezüglich der an die Stelle der Mathematica vulgaris zu setzenden „alia disciplina“, nämlich der „Mathesis universalis“: „hanc omni alia nobis humanitus tradita cognitione potiorem, utpote aliarum omnium fontem, esse mihi persuadeo“. In der Reg. XIV (ebda., 439 f.) heißt es: „. . . in omni ratiocinatione per comparationem tantum veritatem praecise (cognoscimus). Ver. gr., hic: omne A est B, omne B est C, ergo omne A est C; comparantur inter se quaesitum et datum, nempe A et C, secundum hoc quod utrumque sit B, etc. Sed quia, ut saepe jam monuimus, syllogismorum formae nihil juvant ad rerum veritatem percipiendam, proderit lectori, si illis plane rejectis, concipiat omnem omnino cognitionem, quae non habetur per simplicem et purum unius rei solitariae intuitum [vgl. jedoch S. 211, Anm. 185], haberi per comparationem duorum aut plurium inter se. Et quidem tota fere rationis humanae industria in hac operatione praeparanda consistit“. Wenn nämlich die Wahrheit nicht „unmittelbar“ einleuchtet, bedarf es der Hilfe einer „Kunst“ (artis adjumento), um zur Wahrheit zu gelangen. Und diese Kunst besteht eben im Wesentlichen darin, die Verhältnisse bzw. Proportionen (habitudines sive proportiones [vgl. Reg. XVIII, 462, 11: relatio sive habitudo; Reg. VI, 385, 1 f.: proportiones sive habitudines]), gemäß denen eine dem jeweils „Gesuchten“ (quaesitum) und „Gegebenen“ (datum) „gemeinsame Natur“ (natura communis) sich auf das „Gesuchte“ und das „Gegebene“ verteilt, soweit umzugestalten, „ut aequalitas inter quaesitum, et aliquid quod sit cognitum, clare videatur“ (440). Vgl. 447: „. . . . velimus duntaxat proportiones quantumcumque involutas eo reducere, ut illud, quod est ignotum, aequale cuidam cognito reperiatur“, was für alles mögliche Forschen und Fragen (quaestiones omnes) gilt. Vgl.

schen Grundwissenschaft eine — in ihren ontologischen Voraussetzungen nicht geklärte — symbolische Disziplin, die, von vornherein auf das Ganze der Welt ausgerichtet, sich allmählich zum System der modernen mathematischen Physik erweitert. Sie macht es möglich, die Dinge dieser Welt nicht mehr in ihrem Zählbarsein und die Welt selbst nicht mehr in ihrer durch die Ordnung der Anzahlen bestimmten τάξις zu verstehen, sondern den Weltaufbau in einem symbolischen Kalkül als „gesetzlich" geordneten Ablauf von „Ereignissen" zu fassen. Für das Welt-Verständnis als solches ist jetzt der symbolische „Zahl"-Begriff leitend geworden: durch ihn ist die moderne Idee der Wissenschaft überhaupt bestimmt.

In Vieta's „allgemeiner Analytik" wird dieser symbolische Begriff der „Zahl" in Gestalt der species zum ersten Mal sichtbar. Von hier aus führt auch — über die „characteristica universalis" von Leibniz[150]) — ein direkter Weg zu den modernen „logistischen" Theorien. Voraussetzung für diese ganze Entwickelung ist die Umwandlung des antiken „Anzahl"-Begriffs, seine Erhebung in eine neue begriffliche Dimension. Die damit verbundene durchgängige Modifikation der antiken Erkenntnismittel und Erkenntnisziele ist am besten durch die schon erwähnte Formulierung gekennzeichnet, mit der Vieta am Schluß der „Isagoge" die letzte und ureigenste Aufgabe seiner „analytischen Kunst" bestimmt: „fastuosum problema problematum ars Analytice . . . iure sibi adrogat, Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE".

Reg. VI, 384 f., auch den Anfang der Reg. XVII, ferner die durch Beeckman überlieferte Kennzeichnung dieser Kunst als der „Algebra generalis" (X, 333), durch welche Descartes „ad perfectam Geometriae scientiam pervenit, imo qua ad omnem cognitionem humanam pervenire potest" (X, 331—332), dazu den geplanten Titel des „Discours de la méthode", wie ihn Descartes in einem Brief an Mersenne vom März 1636 (I, 339) angibt: „Le projet d'une Science universelle qui puisse éleuer nostre nature à son plus haut degré de perfection. Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie; où les plus curieuses Matieres que l'Autheur ait pû choisir, pour rendre preuue de la Science universelle qu'il propose, sont expliquées en telle sorte, que ceux mesmes qui n'ont point estudié les peuuent entendre". (Vgl. auch S. 207, Anm. 178.) — Über die Art der symbolischen Darstellung ist sich Descartes in den „Regulae" noch nicht vollkommen im Klaren (s. weiter unten § 12 B, bes. S. 208, Anm. 179 und S. 214 ff.).

Zu den zitierten Stellen der „Regulae" vgl. übrigens Nicolaus von Cusa, De docta ignorantia, Cap. I: „Omnes autem investigantes in comparatione praesuppositi certi proportionabiliter incertum iudicant; comparativa igitur est omnis inquisitio, medio proportionis utens".

[150]) vgl. Ad. Trendelenburg, Über Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik, Abh. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1856 = Hist. Beiträge z. Philos. III, 1867, S. 1—47.

## § 12.
## Der Begriff der „Zahl" bei Stevin, Descartes und Wallis.

### A.

Im Gegensatz zur grundsätzlich konservativen Haltung Vieta's ist das Wirken von Simon Stevin (1548—1620)[151]) durch eine entschiedene Bevorzugung neuartiger Forschungswege und ungewohnter Thesen gekennzeichnet. Während Vieta in seinen mathematisch-astronomischen Schriften allenthalben den traditionsgebundenen und umständlichen Stil des Juristen beibehält, im Geiste der neuerstandenen antiken Welt zu denken sich bemüht und seine Arbeiten in lateinischer Sprache publiziert, bricht Stevin bewußt mit den überlieferten Wissenschaftsformen, stellt seine „praktische" kaufmännische, finanztechnische und ingenieurtechnische Erfahrung[152]) in den Dienst seiner „theoretischen" Beschäftigung — wie auch umgekehrt die „Theorie" in den Dienst der „Praxis" — und läßt seine Werke als Flame zunächst in flämischer Sprache, dann auch teilweise in eigener französischer Übersetzung erscheinen[153]). Diese Gegensätzlichkeit im Persönlichen, im „Stil" ihres Wirkens, überträgt sich auf die Einschätzung ihrer antiken

[151]) Eine zusammenfassende Darstellung seines Lebens und seiner Werke gibt H. Bosmans in dem Artikel „Stevin" der belgischen „Biographie Nationale", T. XXIII, 1924, S. 884—938.

[152]) Wie Bombelli, dessen „Algebra" einen starken Einfluß auf ihn ausübt, ist er besonders in der Technik des Wasserbaus bewandert. Er bekleidet auch — unter Moritz von Oranien — ein entsprechendes Amt. Daneben ist er Generalquartiermeister der niederländischen Armee und Finanzkontrolleur (vgl. Bosmans, S. 888).

[153]) Mit Ausnahme des größeren Teils der französisch geschriebenen „Arithmetique" (1585) und insbesondere auch des „Appendice Algebraique" (1594), der eine allgemeine Regel zur Lösung numerischer Gleichungen beliebigen Grades enthält (ed. Girard, I, S. 88 f.). Den „Appendice Algebraique" übersetzte Stevin später selbst ins Flämische (vgl. Bosmans, S. 900 ff.). — Die Schriften Stevins, die in der von Girard 1634 veranstalteten französischen Gesamtausgabe enthalten sind, lassen sich hinsichtlich des Textes in drei Gruppen teilen: 1. die von Stevin selbst französisch geschriebenen bzw. ins Französische übertragenen, zu denen vor allem eben die „Arithmetique" gehört; 2. die von Jean Tuning unter der Aufsicht von Stevin übersetzten, nämlich ein Teil der für Moritz von Oranien bestimmten „Memoires Mathematiques". (Diese erschienen erstmalig in je einer flämischen, französischen und lateinischen Ausgabe im Jahre 1608, doch wurde mit dem Druck bereits 1605 begonnen. Die lateinische Übertragung stammt zum größten Teil von Willebrord Snellius, zu einem kleinen von Hugo Grotius.) 3. die von dem Herausgeber Girard selbst übersetzten Werke, vor allem „l'Art Ponderaire" (Statik), ferner auch die „Geographie" und die „Astronomie". Die Übertragung von Girard ist ziemlich zuverlässig: was er von sich aus hinzufügt, wird von ihm entsprechend gekennzeichnet; der Gedankengang Stevin's wird jedenfalls genau wiedergegeben, wenn auch Girard sich manche Kürzungen erlaubt (vgl. Bosmans, S. 889; 914 ff.; 924 ff.). — Wir zitieren aus der „Arithmetique" nach der Erstausgabe von 1585, im übrigen nach der ed. Girard von 1634.

Vorbilder. Aber auch Stevin ist von der Idee der „Erneuerung" besessen. Sie gewinnt bei ihm eine besondere Gestalt in der Vorstellung des „weisen Zeitalters", des „siècle sage", das einstmals bestanden hat und das es wieder zu verwirklichen gilt. Im 1. Buch der „Geographie"[154]), Def. VI (ed. Girard, 1634, II, S. 106—128) handelt Stevin in aller Ausführlichkeit von diesem „weisen Zeitalter". Er „definiert" (S. 106, 2. Sp.): „Nous appellons siecle sage, celuy auquel les hommes ont eu une cognoissance admirable des sciences, ce que nous remarquons infailliblement par certains signes, toutesfois sans sçavoir qui ce sont esté, ou à quel lieu, ny quand". Mit den folgenden Bestimmungen umreißt Stevin den Horizont, in dem sich die Wissenschaft des 17. Jahrh. entfaltet, und gibt er die Voraussetzungen an, die dem Selbst-Verständnis der modernen Wissenschaft überhaupt zu Grunde liegen: „. . . c'est une chose venue en usage d'appeller siecle barbare ce temps là, [qui] depuis 900 ou mille ans en çà jusques à environ 150 ans passez, pource que les hommes avoient esté 7 ou 8 cens ans comme idiots, sans exercice des lettres et sciences: ce qui a pris son origine alors que les livres ont esté bruslez, par les troubles, guerres, et ruines; ce qui puis apres non sans grand travail, a esté remis en premier estat ou peu s'en faut; or ledit temps auparavant se pouvant nommer siecle sage au regard du susmentionné siecle barbare, toutesfois nous n'avons entendu à la definition d'un tel siecle sage, car les deux compris ensemble ne sont autres, que le vray siecle barbare, à comparaison de ce temps incogneu auquel nous remarquons iceluy [sc. le siècle sage], avoir esté sans aucune doute . . ." (ebda.). Das „barbarische Zeitalter" erstreckt sich demnach „du commencement des Grecs jusques à present" (S. 108, 2. Sp.). Als „Anzeichen" dafür, daß in der voraufgegangenen Zeit irgendwann einmal die aurea aetas der Wissenschaft tatsächlich bestanden hat, gelten Stevin:

1. die Spuren vollkommener astronomischer Kenntnisse, die bei Hipparch und Ptolemaios zu finden seien, deren Schriften er als bloße „Überreste" des urzeitlichen Wissens versteht („reliques de ce qui avoit esté auparavant" — S. 107, 1. Sp.). Zu ihrer Zeit nämlich sei bereits jenes gewaltige Wissen um die Himmelsvorgänge („grande experience et cognoissance du cours du ciel") fast ganz am Erlöschen gewesen („est presque venue à s'esteindre" — S. 106, 2. Sp.). Auch wiese mancherlei in einigen arabischen Schriften („quelques escrits en langue Arabique" — S. 107, 1. Sp.), die bereits vor Ptolemaios be-

---

[154]) Die „Geographie" bildet den 2. Teil der „Cosmographie", deren erster (trigonometrischer) Teil die „Doctrine des Triangles" und deren dritter Teil die „Astronomie" enthält. (Das 3. Buch der „Astronomie" ist der Darstellung des Kopernikanischen Systems gewidmet.)

nutzt worden seien, nach dieser Richtung[155]). Die heliozentrische Lehre insbesondere sei uralter Herkunft, selbst Aristarch von Samos habe sie kaum noch richtig verstanden.

2. die Algebra, wie sie uns aus arabischen Büchern bekannt geworden sei und die einer der merkwürdigsten „Überreste" des „weisen Zeitalters" darstelle. Von ihr sei in den Schriften der Chaldäer, der Hebräer, der Römer und auch der Griechen nichts zu finden, denn — fügt Stevin ausdrücklich hinzu — Diophant sei „modern" („car Diophante est moderne" — S. 108, 1. Sp.). Über die Gründe dieses Versagens namentlich bei den Griechen hat Stevin eine ganz bestimmte Meinung, auf die wir weiter unten genauer eingehen werden.

3. die Zeugnisse der fremden Herkunft der griechischen Geometrie. In diesem Wissenszweig sei die Überlieferung allerdings am zuverlässigsten. Die Bücher Euklids vermittelten uns „quelque chose d'admirable et fort necessaire à voir, et à lire, nommément l'ordre en methode d'escrire les Mathematiques en ce susdit temps du siecle sage" (S. 109, 2. Sp.).

4. die Kenntnisse betreffs der Höhe der Wolken, wie sie in einer arabischen Schrift zum Vorschein kommen und die Stevin nicht zögert, auf die Wissenschaft des „weisen Zeitalters" zurückzuführen[156]).

5. die „Alchimie", die den Griechen unbekannt war und deren sachkundigsten Vertreter Stevin in Hermes Trismegistos erblickt![157])[158])

In der Voraussetzung, daß die Erkenntnisfähigkeit des Menschen sich seitdem nicht vermindert habe, entwirft Stevin nun auch einen allgemeinen Plan, um allmählich wieder zu dem Wissen des „weisen

[155]) In diesem Punkte wie in vielen anderen beruft sich Stevin auf Mitteilungen von Joseph Scaliger.

[156]) vgl. das 3. Buch der „Geographie", Anf., II, S. 137, 1. Sp. — Stevin erklärt den Inhalt dieses Buches einer Schrift von Petrus Nonius (nämlich „De crepusculis liber unus", 1542) zu verdanken, welche ihrerseits eine Erweiterung des entsprechenden von Gerhard von Cremona übersetzten Werkes von Alhazen (d. i. Ibn al-Haiṯam, Abû 'Alî Ḥasan b. Ḥusain b. al-Haiṯam al-Baṣrî) darstellt (s. Alhazen filii Alhazen De crepusculis et nubium ascensionibus liber unus in: Opticae thesaurus Alhazeni Arabis libri septem, nunc primi editi . . . a Federico Risnero, Basel, 1572, S. 283—288).

[157]) „. . . nonobstant il est incertain qui il a esté, de quelle nation, et en quel temps il a vescu, combien qu'il soit tenu fort ancien" (S. 109, 2. Sp.). — Bezüglich der damit zusammenhängenden Goldmacherkunst sagt Stevin: „tel abus se devroit rapporter aux abuseurs de ceste inespuisable science, mais non pas à elle" (ebda). Nach Stevins Auffassung war diese Wissenschaft (d. h. im Grunde die Chemie) dazu bestimmt, an die Stelle der alten Schulphysik zu treten.

[158]) Kein geringerer als Hugo Grotius, der Stevin persönlich kannte, teilte dessen Anschauungen vom „weisen Zeitalter". Stevin erbat sich von ihm eine Art Denkschrift über die Zeugnisse, die für das Bestehen eines solchen Zeitalters sprechen. Sie ist in der ed. Girard, II, S. 110 abgedruckt.

Zeitalters“ zu gelangen. Dieser Plan umfaßt 4 Artikel und stellt den ersten Entwurf einer „Organisation der Forschung“ dar (II, S. 110ff.):

1. Es müssen sehr viele Beobachtungen (namentlich astronomischer, „alchimistischer“, medizinischer Art) angestellt werden, und zwar von sehr vielen Menschen, die an sehr verschiedenen Punkten der Erde wohnen und den verschiedensten Völkern angehören.

2. Das letztere ist aber nur möglich, wenn für die Mitteilung und (vor allem mathematische) Auswertung dieser Beobachtungen nicht das gelehrte und nur Wenigen zugängliche Lateinische, sondern die eigene Muttersprache verwandt würde, was seit den Tagen der Griechen nicht mehr geschehen sei.

3. Allerdings eigneten sich nicht alle Sprachen für diesen Zweck[159]). Man müsse also zunächst feststellen, worin die Güte einer Sprache bestehe. Das Griechische sei für die mathematischen Wissenschaften sehr angemessen gewesen, weswegen noch jetzt so viele mathematische Termini griechischen Ursprungs verwandt würden[160]). Das liege daran, daß im Griechischen die Zusammensetzung von Wörtern sehr leicht sei. In dieser Hinsicht werde aber das Griechische vom Flämischen weit übertroffen, da die Menge der einsilbigen und folglich für die Zusammensetzung besonders geigneten Wörtern hier am größten sei, wofür Stevin den statistischen Beweis zu erbringen unternimmt[161]).

4. Man muß bei jeder wissenschaftlichen Darstellung und Lehrtätigkeit die richtige Ordnung einhalten (le bon ordre en la description et instruction des arts). Hier wäre nun das Verfahren der mathematischen Disziplinen, wie es uns vom „weisen Zeitalter“ her überliefert sei, vorbildlich („je n'en remarque de meilleur pour le faict des Mathematiques, que celui du siecle sage“ — S. 110, 2. Sp.), d. h. die Darstellungsweise der Euklidischen „Elemente“ (s. oben das 3. Anzeichen), die Stevin als „ordre naturel“ (S. 125, 2. Sp.) anspricht. —

Gerade für Stevin, der in so unbekümmerter Weise die Schulwissenschaft beiseite schiebt und auch die Autorität der Griechen nur gering achtet, dagegen ständig aus seiner praktischen Erfahrung schöpft, ergibt sich aus diesem Gedanken des einstmals wirklich gewesenen und nun erneut zu verwirklichenden „weisen Zeitalters“ die Notwendigkeit, die überlieferten Anschauungen auf die in ihnen enthaltene Ur-Wahrheit zu durchforschen und andererseits die herkömmlichen Begriffe auf ihre Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit zu prüfen. Es ist nun be-

---

[159]) „C'est icy un poinct qui ne me fait gueres bien presumer de pouvoir quelque jour encor parvenir à ce siecle sage“ (S. 112, 1. Sp.).

[160]) „Donc le Grec estant tel, que par iceluy on apprend les Mathematiques, doit estre tenu pour un bon langage“ (S. 113, 2. Sp.).

[161]) Darum lehrte auch Stevin in Leyden Mathematik in seiner eigenen Sprache, mit dem Titel „Professor in de Duytsche Mathematik“ (vgl. weiter unten S. 206, Anm. 176).

zeichnend, daß er den Griechen gegenüber immer wieder die arabische Wissenschaft ausspielt. Der letzte Grund hierfür ist das arabische Ziffern- und Positionssystem, das ihm der griechischen Bezeichnungsweise unendlich überlegen zu sein scheint und das er als Erbgut des „weisen Zeitalters" zu betrachten geneigt ist[162]). Von diesem arabischen Ziffern-System aus unternimmt er eine grundlegende Kritik des traditionellen „Anzahl"-Begriffs, die an dem in der Tat entscheidenden Begriff der „Eins", der „Monade", der „unitas" einsetzt.

Die Definition I seiner „Arithmetique" (S. 1v) lautet: „Arithmetique est la science des nombres". Definition II: „Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose (ebda.). Dieser Definition folgt eine genaue Erläuterung, in der der symbolische Charakter des neuen „Zahl"-Begriffs deutlich zum Vorschein kommt. Stevin's Hauptthese lautet: „que l'unité est nombre"[163]). Er erklärt (S. 2r), „alle alten und neuen Philosophen", die sich zu dieser Frage geäußert hätten, gelesen und auch mit vielen Gelehrten darüber gesprochen zu haben, nicht etwa, weil er bezüglich dieser seiner Behauptung irgendwelche Zweifel empfunden hätte („non certes, car i'en estois ainsi asseuré, comme si la Nature mesme me l'eust dict de sa propre bouche"), sondern um gegen alle Einwände gewappnet zu sein. Man behaupte gemeinhin, die Eins wäre nicht „nombre", sondern nur „son principe, ou commencement". Dies sei völlig falsch, denn — so lautet ein Argument Stevin's —:

der Teil ist von gleichem Stoff (de mesme matiere) wie das Ganze;
die Eins ist Teil einer Menge von Einsen;
folglich ist die Eins „von gleichem Stoff" wie die Menge der Einsen:
aber der „Stoff" der Menge von Einsen ist „Zahl" (mais la matiere de multitude d'unitez est nombre);
also ist der „Stoff" der Eins — und damit die Eins selbst — „Zahl".

---

[162]) Seine „Disme", in der er die Rechnung mit Dezimalbrüchen darstellt und darüber hinaus das Dezimalsystem für alle Maße fordert, beruht letzten Endes auf dem Gedanken der universalen Anwendungsmöglichkeit der von ihm immer wieder hervorgehobenen „progression decuple", wie sie dem arabischen Positionssystem zu Grunde liegt (vgl. II, S. 108, 2. Sp.; Arithm., S. 139). — Übrigens verwendet auch Vieta — hierin wiederum von Regiomontanus (und damit mittelbar von Peurbach) abhängig — in seinem „Canon mathematicus" Dezimalbrüche (vgl. Ritter, a. a. O., S. 251; 361; s. ferner Tropfke I$^3$, 172—177). Aber erst durch Stevin fand die Rechnung mit Dezimalbrüchen allgemeine Verbreitung.

[163]) Am Schluß der „Arithmetique", S. 202 f., faßt Stevin unter dem Titel „Theses mathematiques" die mit den gewohnten Anschauungen nicht zu vereinbarenden Behauptungen zusammen, die er in seinem Werk aufgestellt hat. Die These I ist eben die im Text genannte. (Die „Thesen" sollten in einem besonderen Werk genauer bewiesen werden — vgl. Arithm., S. 203 und 5v.)

Wer dies leugne, sei mit demjenigen zu vergleichen, der leugne, daß ein Stück Brot — „Brot" sei (qu'une piece de pain soit du pain).

Was geschieht in diesem Syllogismus? Was müssen die in ihm verwandten Begriffe bedeuten und welcher Art müssen sie sein, damit er wirklich stimmt? — Der entscheidende Satz ist derjenige, in dem der „Stoff der Menge von Einsen" mit „Zahl" gleichgesetzt wird. Stevin übernimmt hier einfach die klassische Definition des numerus als „der aus Einsen bestehenden Menge" (vgl. Teil I, S. 57), versteht aber diese begriffliche Bestimmung selbst als „Stoff" des Definiendum[164]), in demselben Sinne, in dem man üblicherweise vom Stoff (materia) des Wassers oder des Brotes spricht, — in welchem Sinne allein die erste Prämisse des Syllogismus zutreffend ist, wonach der „Teil" von dem gleichen Stoffe wie das „Ganze" sei. Das bedeutet keineswegs, daß Stevin hier einen Paralogismus begeht. Was seiner Auffassung als fundamentale Voraussetzung zu Grunde liegt — ohne daß er sie freilich als solche durchschaute — ist eben die Identifizierung der Seinsweise des Gegenstandes mit der Seinsweise des auf diesen Gegenstand bezogenen Begriffs. Was die gewaltige Schwierigkeit der antiken Ontologie ausmacht — nämlich die Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem „Sein" des Gegenstandes und dem „Sein" des begriffenen Gegenstandes —, findet hier — und nicht nur hier — eine „selbstverständliche", auf ihre Voraussetzungen und ihre Tragweite hin gar nicht diskutierte Lösung. Die Konsequenz dieser Lösung ist das symbolische Verständnis des jeweiligen Gegenstandes, wodurch dessen faktische Gegenständlichkeit mit der Seinsweise eines „allgemeinen Gegenstandes" in eins gesetzt wird, oder — was dasselbe ist — wodurch der Gegenstand einer intentio secunda, nämlich ein Begriff als solcher, in den Gegenstand einer intentio prima verwandelt wird. Eben ein solches symbolisches Verständnis des numerus (bzw. der quantitas) setzt hier der Syllogismus voraus. — Die Bestätigung dafür finden wir wiederum bei Stevin selbst, und zwar im 1. Buch seiner „Geographie" (II, S. 108).

Der eigentliche Grund für die nach seiner Meinung grundfalsche und verhängnisvolle Behauptung, daß die Eins keine „Zahl", sondern das principium, die ἀρχή der „Zahl" sei (vgl. Teil I, S. 58 u. 101)[165]), sei das Fehlen der richtigen Zeichenschrift bei den Griechen („faute d'appareil necessaire, nommément de chiffres"), was ohne weiteres verstehen ließe, daß sie keine „Arithmetiker" waren. Sie hätten, in

---

[164]) Was also nichts mit dem Begriff der ὕλη bei Domninos zu tun hat (vgl. Teil I, S. 41 f.).

[165]) Arithm., S. 3r: „O heure infortunée en laquelle fut premierement produicte ceste definition du principe du nombre! O cause de difficulté et d'obscurité de ce qui en la Nature est facile et clair!"

Mißdeutung des aus dem „weisen Zeitalter" zu ihnen gedrungenen — „Punkt" genannten — Zeichens „.", das mit dem gegenwärtig üblichen Zeichen „0" identisch gewesen sei, die „Punkte" als — „Einsen" verstanden und diese auch folgerichtig mit Hilfe solcher Punkte dargestellt[166]). Wie nun der geometrische Punkt in der Tat das principium der Linie und nicht selbst „Linie" sei, so mußten sie — durch ihre falsche Deutung des arithmetischen Zeichens „." (des „poinct Arabique") verführt — die Eins als principium der „Zahl" und nicht selbst als „Zahl" begreifen, — womit sie dem gesamten „barbarischen Zeitalter" sein charakteristisches „unarithmetisches" Gepräge verliehen. In Wahrheit sei nicht die Eins, sondern die Null das principium der „Zahl": sie — und nicht die Eins — sei das wahre Analogon zum geometrischen Punkt. Das heute für die Null verwandte Zeichen „0" (an Stelle des urzeitlichen, „arabischen" Zeichens „.") sei nur gewählt worden, um jede Verwechselung mit dem Punktzeichen am Abschluß eines Satzes zu vermeiden. Um aber wenigstens in der Namengebung mit dem „weisen Zeitalter" im Einklang zu bleiben, nennt Stevin die Null „poinct de nombre" (in Analogie und im Unterschied zum „poinct Geometrien")[167]).

---

[166]) Stevin denkt dabei nicht nur an die alte Definition der μονάς als einer στιγμὴ ἄθετος (vgl. z. B. Aristoteles, Metaph. M 8, 1084 b 25—27), sondern ihm schwebt wohl auch die Darstellung der figurierten Anzahlen .·., :·:, ·.·. usf. vor. Er sagt aber bezeichnenderweise in Bezug auf diese griechische Darstellungsweise: „et estoient iceux poincts mis en usage entre leurs chiffres" (S. 108, 2. Sp.). Was nun das Zeichen „." für 0 anbetrifft, so findet es sich in der Tat bei den Arabern, aber nachweislich erst seit dem 9. nachchristlichen Jahrhundert, ferner in dem indischen sog. Rechenbuch von Bakhṣâli, das ebenfalls in eine sehr späte Zeit (jedenfalls nach dem 7., vielleicht erst ins 12. nachchristliche Jahrh.) zu setzen ist. Das in den Sehnentafeln bei Ptolemaios vorkommende Zeichen o ist wohl nur als Abkürzung für οὐδέν anzusehen (vgl. Tropfke I$^3$, 29; 40f.; 22f.; 18; 25). — Zur Frage nach dem Ursprung der Null überhaupt vgl. jetzt Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften, Bd. I: Vorgriechische Mathematik, 1934 [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. XLIII], S. 42, auch S. 5.

[167]) In der „Arithmetique" (Def. III, S. 5v; vgl. auch S. 3v) nennt Stevin mit Rücksicht auf die traditionelle Terminologie die Null noch „commencement de nombre", sagt aber in der „Geographie" ausdrücklich: „et puis que O est appellé au siecle sage *poinct* nous luy donnerons aussi ce nom *poinct de nombre,* en difference du *poinct Geometrien,* et delaisserons ce premier nom *commencement,* que nous avons eu en usage jusques à present" (S. 108, 2. Sp.).

[Während es z. B. noch bei Peurbach („Algorithmus Magistri Georgij Peurbachij in integris", am Anfang) ausdrücklich heißt: „Unitas autem non est numerus: sed principium numeri. Unde ipsa habet se in Arithmetica ad numerum sicut punctum in Geometria ad magnitudinem" (vgl. dazu Cantor II$^2$, 180f.), kann man bereits bei Joh. Buteo, Logistica, quae et Arithmetica vulgo dicitur, 1559, p. 8, lesen: „Et quamvis monas non sit numerus, in omni tamen Logistica ratione vim et effectum parem numeris obtinet". (Vgl. auch oben S. 159, Anm. 89.)]



Daß die Eins selbst „Zahl" sei, ist also für Stevin darum so wesentlich, weil er die bisher der Eins zugewiesene ἀρχή-Rolle auf die Null überträgt: „le 0 est le vrai et naturel commencement" (Arithm., S. 4r). Er wird hierbei entscheidend von der Rücksicht auf die Zeichenschrift geleitet, indem er die Null ganz und gar mit dem Zeichen „0" identifiziert, dessen volle Bedeutung wiederum nur innerhalb des Ziffernsystems als Ganzen faßbar ist. Aber das gilt nicht nur für die Null, sondern auch für alle durch „Ziffern" repräsentierten „Quantitäten"[168]. Als „Arithmetiker" hat Stevin nicht mehr jeweils bestimmte Anzahlen von Einsen im Auge, sondern die unbegrenzte Zusammensetzbarkeit der Ziffern, die nach gewissen „Rechen"-Regeln von statten geht. Das heißt aber: er begreift die „Quantitäten", mit denen er es zu tun hat, in symbolischer Weise: er kennt gar keine „Anzahlen von Einsen" mehr, sondern nur noch in Ziffern sich unmittelbar ausdrückende „Zahlen".

Das symbolische Verständnis der „Zahl" läßt diese nun, wie wir gesehen haben, als einen „Stoff" erscheinen, vergleichbar dem „Stoff" des Brotes oder des Wassers. Was eine solche „Materie" — innerhalb der hier auch für Stevin maßgebenden traditionellen Auffassung — auszeichnet, ist ihre stets fortsetzbare Aufteilbarkeit, ihr „kontinuierlicher" Charakter. Das führt sofort dazu, die „Zahlen" den geometrischen Gebilden weit stärker anzugleichen, als dies in der Antike je mit den „Anzahlen" und den „Größen" geschehen konnte: „la communauté et similitude de grandeur et nombre, est si universelle qu'il resemble quasi identité" (Arithm., S. 3r)[169]. So stützt Stevin seine These, daß nicht die Eins, sondern die Null das principium der „Zahl" sei, u. a. durch folgendes charakteristische Argument: so wie eine Linie durch Hinzufügung eines Punktes nicht verlängert wird, so wird eine „Zahl", z. B. 6, nicht durch Hinzufügung der Null vergrößert; denn $6 + 0 = 6$; daher können weder unendlich viele Punkte „zusammengenommen" eine „Linie", noch unendlich viele Nullen „zusammen" eine „Zahl" ergeben, während dies bereits bei zwei Einsen der Fall ist. Wolle man nun aber zugeben, daß eine Linie $\overline{AB}$ durch Hinzufügung eines Punktes C in der Weise „stetig" verlängert werde, daß eine neue Linie $\overline{AC}$ entstehe, so könne man mit demselben Rechte sagen, daß die Zahl 6 sich durch „Hinzufügung" der 0

[168]) Daher auch die bekannte Bedeutungsverschiebung des — dem Arabischen entlehnten — Wortes „cifra" bzw. „chiffre": zunächst nur die Null meinend, wird es allmählich zur gemeinsamen Bezeichnung für alle zehn „Ziffern" (vgl. Tropfke I³, 9 ff.; 14 ff.).

[169]) Damit ist faktisch auch eine symbolische Umdeutung der geometrischen Gebilde gegeben, die aber erst bei Descartes deutlicher sichtbar wird (vgl. Abschnitt B).

„stetig“ zur Zahl 60 vergrößere![170]). Hier wird also der stetige Zug einer Linie mit der beliebig fortführbaren Aneinanderreihung von Ziffern, die immer neue „Zahlen“ ergibt, verglichen. Das bedeutet eben nichts anderes, als daß auch die „Zahlen“ stetige Gebilde sind, und nicht „diskrete“, wie das „barbarische Zeitalter“ behauptet hatte. So formuliert Stevin ausdrücklich die These: „que nombre n'est poinct quantité discontinue“ (Arithm., S. 4v). Die antike Anschauung von der „Diskretheit“ der Anzahlen stützte sich auf die Einsicht der Unaufteilbarkeit der „Eins“ (vgl. Teil I, S. 58 und 101 f.). Nach Stevin ist die Eins selbstverständlich aufteilbar, wobei er sich übrigens auf die Autorität Diophants, des „prince des Arithmeticiens“, beruft, der in gewissen Aufgaben seines Werkes (vgl. S. 137 f.) gerade die Teilung der Eins fordere (Arithm., S. 3r f.). Die Eins ist genau so „Teil“ einer „Zahl“ und also selbst „Zahl“ (vgl. oben S. 199), wie eine kleinere Linie Teil einer größeren und eben selbst „Linie“ ist, während weder die Null noch der Punkt „Teile“ der „Zahl“ bzw. der Linie sind. Die „Teile“ der Eins sind wiederum „Zahlen“, nämlich „Bruchzahlen“[171]), die ins Unendliche abnehmen. So stellt sich die völlige Entsprechung der geometrischen Größen und der „Zahlen“ her: „comme à une continue eau correspond une continue humidité, ainsi à une continue grandeur correspond un continue nombre: Item comme la continue humidité de l'entiere eau, souffre la mesme division et disioinction que son eau, Ainsi le continue nombre souffre la mesme division et disioinction que sa grandeur; De sorte que ces deux quantitez ne se peuvent distinguer par continue et discontinue ...“ (Arithm.,

---

[170]) Arithm., S. 3v f.: „Comme la ligne AB ne se peut augmenter par addition du poinct C, ainsi ne se peut le nombre D 6, augmenter par l'addition de E 0, car aioustant 0 a 6 ils ne sont ensemble que 6.

A —————— B  C·  D 6  E 0.

Mais si l'on concede que AB soit prolongée iusques au poinct C, ainsi que AC soit une continue ligne, alors AB s'augmente par l'aide du poinct C; Et semblablement si l'on concede que D 6, soit prolongé iusques en E 0, ainsi que DE 60 soit un continue nombre faisant soixante, alors D 6 s'augmente par l'aide du nul 0.

A —————— B C  D E
6 0“.

Man sieht: die Ziffern als solche treten hier an die Stelle der traditionellen Maßstrecken! Einleuchtend wird dieses Argument erst, wenn man unter 6 und 60 die Dezimalbrüche 0,6 und 0,60 versteht, die Stevin so schreibt: $\overset{①}{6}$ und $\overset{①\,②}{6\;0}$.

[171]) Def. VII: „Nombre entier est unité, ou composée multitude d'unitez“. Def. X: „Nombre rompu, est partie ou parties de nombre entier“ (vgl. Euklid VII, Def. 3 u. 4).

S. 5r). Die „Einheiten“ einer „Zahl“ sind nicht „disioinctes“, sondern „conioinctes“ (S. 5v).

Von dem neuen „Zahl“-Begriff aus bekämpft Stevin nun auch die bisher übliche Redeweise von „absurden“ oder „surden“ oder „irrationalen“ (d. h. unaussprechbaren) Zahlen, welche Redeweise aus dem Zwiespalt zwischen dem faktischen „Zahl“-Verständnis und dem Festhalten an dem überlieferten „Anzahl“-Begriff erwachsen war. Seine These lautet (Arithm., S. 33 und S. 202, These IV): „qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationels, irreguliers, inexplicables, ou sourds“ [172]). Denn: „l'incommensurance ne cause pas absurdité des termes incommensurables“, was ja an inkommensurablen Linien und Flächen unmittelbar einleuchtet. $\sqrt{8}$ ist eine „Wurzel“ („racine“). Jede „Wurzel“ ist „Zahl“ („racine quelconque est nombre“ — S. 30; vgl. S. 25) [173]). Er verwirft deshalb die Diophantischen (bzw. Anatolianischen) Termini: latus, quadratum, cubus etc., hält aber dabei an der Unterscheidung zwischen „arithmetischen“ und „geometrischen“ Zahlen fest: Definition VI (S. 6r) lautet: „nombre Arithmetique est celuy qu'on explique sans adjectif de grandeur“ (vgl. oben S. 179 f.); dagegen heißen „Wurzeln“, „quadratische“ Zahlen, „cubische“ Zahlen usf. „nombres Geometriques“ (S. 6v; 9 ff.), wobei freilich zu sagen ist, „que nombres quelconques [sc. arithmétiques] peuvent estre Nombres quarrez, cubi-

[172]) Vgl. hierzu die Meinung von Peletier, De occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, Libri duo, 1560, Lib. II, Cap. II: „Numeri irrationales sintne numeri, an non et cuiusmodi sint“. Was sie eigentlich darstellen, sagt er, „id tanquam in perpetuis tenebris delitescit“. Sie seien jedenfalls „Etwas“, es stehe fest, daß man von ihnen Gebrauch machen müsse (necessarium usum), vor allem in Hinblick auf die Erstreckungen der „stetigen“ Größen (praesertim in Continuorum dimensionibus). Sie seien — wie die echten, „absoluten“ Zahlen — Regeln (praeceptiones) unterworfen. Ihr Verhältnis zu den „absoluten“ Zahlen sei mit dem der Tiere zu den Menschen zu vergleichen („Habent igitur numeri Irrationales cum Absolutis obscuram quandam mutemque communicationem, non secus quam cum hominibus, Bruta: quae praeter id quod sentiunt, suo etiam modo ratiocinantur“). Alles in allem seien sie „unerklärlich“ (inexplicabiles) und hätten nur eine Art Schattendasein. Man dürfe sie nicht unter die Zahlen einreihen, vielmehr müsse ihr Sein als nur in ihrer „Benennung“ (appellatio) enthalten verstanden werden.

[173]) Beweis (vgl. oben S. 199): „La partie est de la mesme matiere que son entier; Racine de 8 est partie de son quarré 8: Doncques $\sqrt{8}$ est de la mesme matiere que 8: Mais la matiere de 8 est nombre; Doncques la matiere de $\sqrt{8}$ est nombre: Et par consequent $\sqrt{8}$ est nombre (S. 31). —

Noch weiter geht Stevins Schüler Albert Girard. In seiner „Invention nouvelle en l'algèbre“, 1629, heißt es S. 13 f.: „Notez qu'on appelle *un nombre* tant les radicaux simples, comme est $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{5071}$, que les multinomes, comme les binomes $2+\sqrt{5}$, item $7-\sqrt{48}$, item $\sqrt{26}-5$, comme les trinomes $4+\sqrt{2}-\sqrt{17}$, et autres multinomes, car ce qui lié par les signes soit $+$ soit $-$ ne font qu'un nombre“. Doch lautet bereits die Def. XXVI der „Arithmetique“ Stevins: „Multinomie algebraique est un nombre consistant de plusieurs diverses quantitez“.

ques, etc.“ (S. 30). Sofern aber ihr „absoluter“, d. i. numerischer, Wert nicht bekannt ist, gehen die „geometrischen Zahlen“ als unbestimmte „Quantitäten“ in die algebraischen Berechnungen ein und werden in folgender Weise bezeichnet: ①, ②, ③, ④ usf. (entsprechend unseren Zeichen: $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ usf.). Wie nun die 0 der „Anfang“ der „arithmetischen“ Zahlen ist, so ist jede beliebige „arithmetische“ Zahl „Anfang“ dieser algebraischen „Quantitäten“ (Def. XIV: „Commencement de quantité, est tout nombre Arithmetique ou radical quelconque“) und wird entsprechend durch ⓪ bezeichnet, sofern man ihren „absoluten“ Wert nicht kennt (S. 15)[174]. Stevin ist auch der erste Mathematiker, der das Subtrahieren einer „Zahl“ als Addition einer „negativen Zahl“ versteht (vgl. Bosmans, S. 899). — Mit allen diesen Thesen gleicht Stevin den Begriff der „Zahl“ dem längst schon üblichen Gebrauch von „Zahlen“ an (vgl. S. 151; S. 184, Anm. 131; S. 186; S. 204, Anm. 172) und legt endgültig das durchschnittliche Verständnis von Zahlbestimmungen fest, wonach „zählen“ können soviel wie sich in den „Ziffern“ auskennen bedeutet[175]. Es ist eine offene Frage, wieviel ihm insbesondere Descartes zu verdanken hat[176]. Doch ist jedenfalls Des-

[174]) Diese Bezeichnungsweise, die eine Abwandlung der Bombelli'schen darstellt, — und vielleicht in letzter Linie auf Chuquet zurückgeht (vgl. S. 174, Anm. 109 und S. 184, Anm. 131) —, benutzt Stevin zumeist bei seiner sehr freien Übertragung der vier ersten Bücher Diophants (Arithm., S. 431—642).

[175]) Bereits Chuquet sagt 1484 am Anfang seines „Triparty“ (Bull. Boncompagni XIII, 1880, S. 593): „Nombrer si est le nombre en lentendement conceu par figures communes artifitielement representer ou de paroles perceptiblement exprimer“. — In dem 1540 erscheinenden — und später immer wieder (u. a. auch von Peletier) neu herausgegebenen, 1582 von Forcadel ins Französische übersetzten — Werk „Arithmeticae practicae methodus facilis“ von R. Gemma Frisius (den Stevin übrigens in anderem Zusammenhange ausdrücklich nennt — vgl. Cantor II², 614) heißt es am Anfang der „Pars prima“: „Numerare, est cuiusvis propositi numeri valorem exprimere, atque etiam quemcunque datum numerum suis characteribus adsignare“. — Gosselin, a. a. O., p. 2r f., formuliert (1577) dasselbe in folgender Weise: „Numerare, est quamcunque numeri qualitatem cum aliquo characteris vel figurae genere representare“; bei den Griechen sei dies durch Punkte und Striche geschehen (puncta vel lineolae), aber auch — wie bei den Hebräern und Römern — durch Buchstaben. Erst die Araber hätten bequemere Zeichen und einen bequemeren Weg des Zählens erfunden („. . . excogitarunt et invenerunt Arabes faciliores characteres, facilioremque numerandi viam . . .“). — Gosselin gibt folgende Einteilung der „Zahlen“ (p. 4r): „integer numerus et absolutus“ (z. B. 8, 9, 5), „particula numeri“ (z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$), „latus numeri“ (z. B. latus 8, latus 9 [also: „rationale Wurzeln“]) und „surdus numerus“ (z. B. latus 7, latus 5, latus $\frac{1}{2}$). — Auch bei Clavius, in der Epitome Arithmeticae practicae (1584) heißt es (p. 6): „Numeratio est cuiusvis numeri propositi per proprios characteres, ac figuras descriptio, atque expressio“.

[176]) Die wenigen Äußerungen, die sich bei Descartes selbst über Stevin finden, betreffen dessen Statik (vgl. S. 195, Anm. 153): Ad.-Tann. II, 247 (dazu 252), IV, 696. Ferner wird Stevin's Sachkunde auf dem Gebiet der Harmonik in Abrede gestellt: I, 331, an welcher Stelle Descartes aber ausdrücklich hinzufügt, daß Stevin „ne laissoit

cartes' Auffassung der „Zahlen" weit traditionsgebundener als diejenige Stevins, wenn er auch andererseits viel klarer als dieser deren begriff-

pas d'estre habile en autre chose". — Andererseits ist es möglich, ja wahrscheinlich, daß Descartes in den letzten Lebensjahren Stevins diesen noch persönlich gesehen und sogar dessen Unterricht genossen hat: gerade in den Jahren 1618—1619 diente Descartes — damals noch „un homme qui ne sçait que très peu de chose" (I, 24, 15) — unter Moritz von Oranien, der durch sachkundige Lehrer — unter denen eben vor allem Stevin zu nennen ist (vgl. S. 195, Anm. 152) — seine Offiziere im Festungsbau, Zeichnen usf. unterrichten ließ. So schreibt Descartes am 24. Januar 1619 in einem Brief an Beeckman (X, 152, 2 f.) ausdrücklich, er beschäftige sich im Augenblick „mit Zeichnen, militärischer Architektur und hauptsächlich mit der flämischen Sprache" (in Pictura. Architectura militari, et praecipue sermone Belgico), wobei wir an die Bedeutung denken müssen, die Stevin dem Flämischen im Hinblick auf die Vervollkommnung der Wissenschaften beimaß (s. oben S. 198): vgl. hierzu G. Cohen, Écrivains français en Hollande dans la première moitié du XVII$^{e}$ siècle, Paris 1920, S. 372 f. und 381. Stevin erteilte wahrscheinlich seinen Unterricht in flämischer Sprache, so wie er ja auch seinerzeit in Leyden den Titel eines „Professor in de Duytsche Mathematik" führte (Cohen, a. a. O., S. 381). — Aber selbst wenn die Annahme eines solchen persönlichen Zusammentreffens Descartes' mit Stevin nicht stimmen sollte, so kann doch nicht bezweifelt werden, daß Descartes in Holland überall auf die Spuren Stevin's stoßen mußte: Stevin war mit Scaliger und Grotius bekannt gewesen, den damals berühmtesten Gelehrten Hollands (vgl. oben S. 197, Anmerkungen 155 und 158); sowohl Constantin Huygens wie Golius, mit denen Descartes korrespondiert, stehen in Verbindung mit Girard, dem wichtigsten Schüler und Herausgeber Stevin's, der 1629 ein eigenes algebraisches Werk („Invention nouvelle en l'algèbre" — vgl. Cantor II$^{2}$, 787 ff. —; es heißt übrigens im Titel weiter: „tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science" — vgl. oben S. 188 f.) publiziert und der — wie Descartes — auch an mechanischen, optischen und musiktheoretischen Problemen interessiert ist (vgl. oben S. 195, Anm. 153 und Cohen, a. a. O., S. 341 f.); Beeckman, dem Freunde Descartes', wird — wahrscheinlich noch vor 1611 — Stevin durch Snellius empfohlen (vgl. Ad.-Tann. X, 29 und oben S. 195, Anm. 153); derselbe Beeckman legt Ende 1618 einer Frage, die er an Descartes richtet, die Statik Stevin's zugrunde (vgl. Ad.-Tann. X, 228 — dazu P. Duhem, Les origines de la statique, I, 1905, S. 280—282. und Milhaud, Descartes savant, 1921, S. 35 f.), u. s. f. — Man darf also wohl annehmen, daß Descartes die „Arithmetique" Stevin's „kannte", — in dem Sinne, in dem Descartes überhaupt Bücher zu „kennen" und zu benutzen pflegte. Er konnte hier vor allem die völlige Angleichung des „numerischen" und des „geometrischen" Bereichs durchgeführt finden (s. oben S. 202 ff.). Auch deckt sich sein Verständnis der „Potenzen" (vgl. Reg. XVI, Ad.-Tann. X, 456 f.) weitgehend mit dem von Stevin, der ja seinerseits hierin von Bombelli abhängig ist (s. oben S. 205, Anm. 174); vgl. hierzu allerdings auch Clavius, Algebra, 1608, Cap. II, p. 9—10, dessen Darstellung in diesem Punkte — vor allem was die Verwendung des Begriffs der „exponentes" bzw. des „exponere" betrifft — auf derjenigen von Stifel beruht (vgl. Tropfke II$^{3}$, 151). (Es mag noch erwähnt werden, daß der Rechenmeister Faulhaber, mit dem Descartes 1619—1620 in Ulm zusammentraf, in seinem „Neuen arithmetischen Wegweiser", 1617, neben einer Reihe mehr oder weniger unbedeutender deutscher und schweizer Rechenmeister nur noch Gemma Frisius und Stevin als Quellen angibt.)

liche Struktur durchschaut. Wir wollen uns deshalb im Folgenden den „Zahl"-Begriff Descartes' vergegenwärtigen, wobei wir uns vornehmlich an den frühen „Regulae ad directionem ingenii" (etwa 1628) orientieren, weil in diesen die ursprünglichen Intentionen Descartes' und die spezifischen Züge seiner Begrifflichkeit doch wohl am deutlichsten zum Ausdruck gelangen.

B.

Der Gedankengang Descartes' setzt bereits, worauf er ja selbst in den „Regulae" hinweist, das Faktum des symbolischen Rechnens — in Gestalt der zeitgenössischen „Algebra" — voraus[177]). Er versteht diese „neue" Disziplin, wie wir gesehen haben, von vornherein nicht als ein genus quoddam Arithmeticae (Reg. IV, 373, 16), sondern als eine schlechthin allgemeine „Kunst", wie sie ihm bei Proklus-Barocius angedeutet zu sein scheint und wie sie — was ihm allerdings unbekannt blieb — bereits von Vieta verwirklicht worden war. Descartes' große Idee besteht nun darin, den „allgemeinen", nur symbolisch darzustellenden und aufzufassenden Gegenstand dieser Mathesis universalis — vermittels „methodischer" Überlegungen — mit der „Substanz" der Welt, mit der Körperlichkeit als „extensio" zu identifizieren[178]). Dadurch erst gewinnt die symbolische Mathematik jene fundamentale Stellung im System des Wissens, die sie seither niemals mehr verloren hat (vgl. oben S. 193f.), mag auch Descartes selbst in der Folgezeit seinen ursprünglichen Ansatz nicht völlig durchgeführt haben. Auf Grund dieses Ansatzes jedenfalls wählt Descartes in den „Regulae"

---

[177]) vgl. oben S. 190 und S. 177, Anm. 116; ferner Reg. VII, Anfang. Vgl. zu diesem ganzen Abschnitt vor allem L. Liard, Descartes, 1882, Chap. I: La mathématique universelle, bes. S. 44 ff. — Wir zitieren im folgenden die „Regulae" nach der Ausgabe Adam-Tannery, Bd. X.

[178]) Das erste Anzeichen dieser Konzeption ist der Brief vom 26. März 1619 an Beeckman, wo von einer „scientia penitus nova" die Rede ist, „qua generaliter solvi possint quaestiones omnes, quae in quolibet genere quantitatis tam continuae quam discretae, possunt proponi", wozu Beeckman am Rande vermerkt: „Ars generalis ad omnes quaestiones solvendas quaesita" (X, 156 f.). Vgl. dazu auch die Bemerkung Beeckman's (X, 52): „Dicit [Picto, d. i. Descartes] . . . se nunquam hominem [oder: neminem] reperisse, praeter me, qui hoc modo, quo ego gaudeo, studendi utatur, accurateque cum Mathematica Physicam jungat. Neque etiam ego, praeter illum, nemini locutus sum hujusmodi studij". Es scheint doch wohl, daß die „scientia mirabilis", deren Grundlagen Descartes am 10. November 1619 gefunden zu haben behauptet (X, 179 und 216) eben diese in ihrer „physikalischen" Anwendbarkeit begriffene mathesis universalis ist. (Zum „inventum mirabile" vom 11. November 1920 dagegen [X, 179] vgl. Milhaud, Descartes savant, 1921, Chap. IV, S. 89 ff.) Erst von hier aus wurde Descartes zum Entwurf einer Metaphysik gedrängt, die dann freilich die faktischen Ausgangspunkte seines „Systems" mehr oder weniger vergessen ließ.

die figürliche Symbolik, die er erst später (vgl. „Discours“, Ad.-Tann. VI, 20) auf Linien beschränkt[179]). Die Konzeption dieser figürlichen Symbolik verknüpft also bei Descartes zwei verschiedene Gedankenreihen: 1. die Auffassung der Algebra als einer „allgemeinen“ Proportionenlehre, deren nur symbolisch erfaßbarer Gegenstand vom numerischen Bereich her seine spezifischen Züge erhält (vgl. S. 178 ff. und weiter unten S. 215 f.), und 2. die Ineinssetzung dieses „symbolischen“ mathematischen Gegenstandes mit dem Gegenstand der „wahren Physik“. Die Verknüpfung beider Gedankenreihen ermöglicht der „methodische“ Begriff der „cognitio certa et evidens“ [180]). Dieser cartesische Erkenntnis-Begriff ist eindeutig stoischen Ursprungs: ihm entspricht die κατάληψις, die soviel wie eine συγκατάθεσις zu einer φαντασία καταληπτική bedeutet[181]). Für Descartes ist dieser Begriff gerade darum und nur darum so wesentlich, weil er der imaginatio (= phantasia) eine fundamentale Rolle zuzuweisen erlaubt. Deshalb steht auch in den „Regulae“ die imaginatio überall im Vordergrunde.

In der „Regula XIV“ (444 ff.) behandelt Descartes u. a. — mit Rücksicht eben auf die Rolle der imaginatio — die Mehrdeutigkeit gewisser Begriffe. In Bezug auf die Aussage „extensio non est corpus“ führt er aus, dem hier gebrauchten Wort „extensio“ entspreche nicht eine von unserer Einbildungskraft besonders vorgestellte „Idee“ („nulla illi [sc. extensionis vocabulo] peculiaris idea in phantasia correspondet“),

---

[179]) In den „Regulae“ stellt die Repräsentation durch gerade Linien (wie auch die durch Punkte) nur einen Spezialfall dar — vgl. Reg. XIV, Ende, Reg. XV und Reg. XVIII, ferner weiter unten S. 214 ff. (vgl. auch die Aufzeichnung Beeckman's: „Algebrae Des Cartes specimen quoddam“, Ad.-Tann. X, 333—335). S. dazu Milhaud, a. a. O., S. 70, Anm. 1, wie überhaupt zu den „Regulae“ daselbst das Chap. III, 1.

[180]) Überhaupt erwächst die „Methode“ Descartes' wesentlich aus dem Bedürfnis nach einer Rechtfertigung der Stellung, die er der Algebra zuweist. Der Gesichtspunkt der „methodischen“ Erkenntnis ist also gegenüber der ursprünglichen Identifikation des „allgemeinen“ mathematischen Gegenstandes mit der figurierten Ausdehnung sekundär. Da jedoch eben alles auf die Rechtfertigung dieser Identifikation ankommt, gewinnt die „Methode“ allmählich eine immer zentralere Bedeutung, wobei ihre „Regeln“ der „mathesis universalis“ selbst abgelauscht werden: der Gang der „inventio“, den die „mathesis universalis“ als „allgemeine Algebra“ verfolgt, wird als der dem menschlichen Verstand überhaupt angemessenste Erkenntnis-Weg entdeckt (vgl. oben S. 193, Anm. 149). In diesem Sinne sind die „Regulae ad directionem ingenii“ in der Tat identisch sowohl mit den „Regeln“ der „mathesis universalis“ als auch mit denen der „Methode“ als solcher (vgl. Milhaud, a. a. O., S. 69; vgl. auch Cogitationes privatae, X, 217: „Dicta sapientum ad paucissimas quasdam regulas generales possunt reduci“).

[181]) Vgl. v. Arnim, Stoic. vet. fragm. I, fr. 59 und 66; II, fr. 56. Dazu Bonhöffer, Epictet und die Stoa, Untersuchungen zur stoischen Philosophie, 1890, S. 161, 163 f., 178 f. (dazu S. 184 ff.), ferner O. Rieth, Grundbegriffe der stoischen Ethik [„Problemata“ Heft 9], 1933, S. 114, und M. Meier, Descartes und die Renaissance, 1914, S. 63. S. auch weiter unten S. 212 f., Anm. 186 und S. 223 f., Anm. 196.

vielmehr werde jene Aussage vom „bloßen Verstand“ bewirkt, der allein die Fähigkeit habe, solche „abstrakten“ Gebilde von dem faktisch Vorgestellten zu trennen („tota haec enuntiatio ab intellectu puro perficitur, qui solus habet facultatem ejusmodi entia abstracta separandi“). Das gelte u. a. auch für die Aussagen „numerus non est res numerata“ [182]) und „unitas non est quantitas“! Alle solche Sätze müssen dem Einbildungsvermögen entzogen sein, um überhaupt als „wahre“ Sätze gelten zu können („quae omnes et similes propositiones ab imaginatione omnino removendae sunt, ut sint verae“). Wollte man sie sich mit Hilfe der Einbildungskraft „vorstellen“, so würde man ja notwendig zu Widersprüchen gelangen: in der Vorstellung nämlich sei die „Idee“ der extensio von der „Idee“ des corpus und ebenso die „Idee“ des numerus von der „Idee“ der res numerata, die „Idee“ der unitas von der „Idee“ der quantitas nicht zu trennen. In Sätzen jedoch, in denen die genannten Worte zwar in derselben Bedeutung und in derselben Weise gebraucht werden — nämlich auf Gebilde bezogen werden, die durch den „bloßen Verstand“ von den der Einbildungskraft zugänglichen „Ideen“ „abstrahiert“ worden sind —, dabei aber nicht ausdrücklich vom Sachgehalt dieser „Ideen“ abgesondert werden, den sie vielmehr selbst der Sache nach (d. h. so, wie sich die Sache in der „Vorstellung“ zeigt) meinen, ist es erlaubt und auch notwendig, sich der Hilfe des Einbildungsvermögens zu bedienen („Notandum est diligenter, in omnibus alijs propositionibus, in quibus haec nomina, quamvis eamdem significationem retineant, dicanturque eodem modo a subjectis abstracta, nihil tamen excludunt vel negant, a quo non realiter distinguantur, imaginationis adjumento nos uti posse et debere . . .“). Wenn z. B. vom „numerus“ die Rede ist, werden wir uns einen Gegenstand „vorzustellen“ haben, der durch eine Menge von Einheiten (per multas unitates) gemessen werden kann. Und wenn auch der („bloße“) Verstand eben nur diese Menge (solam multitudinem) — nämlich die Mengenhaftigkeit als solche — meinen sollte, dürfen wir doch nicht den Fehler begehen, zu glauben, der Begriff (conceptus) des numerus (dem die „idea“ des numerus in der „Vorstellung“ entspricht) schließe die „res numerata“, das Gezählte selbst aus. Tue man dies, so gelange man schließlich dazu, den „Zahlen“ tiefe Geheimnisse anzudichten und bloßen Hirngespinsten nachzujagen [183]). Auch die echte Arithmetik und Rechen-

[182]) vgl. Principia philosophiae II, 8, auch I, 55.

[183]) Descartes hat hier zeitgenössische Werke z. B. von „Rosenkreuzern“ im Auge, wie etwa die von Joh. Faulhaber (Ansa inauditae et mirabilis novae artis, etc., 1618, deutsch 1613; Numerus figuratus, sive Arithmetica analytica arte mirabili inaudita nova constans, etc., 1614; Mysterium Arithmeticum, 1615, anonym; Miracula Arithmetica, 1622 [deutsch, abermalige Fortsetzung der „Continuation“ des „Arithmetischen Wegweisers“, der selbst erstmalig 1615 erscheint], usf.; der lateinische Text der Faul-

kunst halte gemeinhin an dieser irrigen Anschauung fest: „Denn welcher Rechenmeister meint nicht, die Zahlen, mit denen er rechnet, seien nicht nur durch den [„bloßen“] Verstand von jeglichem sachhaltigen Träger abgetrennt [„abstrahiert“] worden, sondern auch durch das Einbildungsvermögen von diesem tatsächlich zu unterscheiden?“ (Quis enim Logista numeros suos ab omni subjecto, non modo per intellectum abstractos, sed per imaginationem etiam vere distinguendos esse non putat?)! Während dies eben nach der Meinung Descartes' nicht der Fall ist und auch gar nicht der Fall sein kann[184]). — In diesen Ausführungen Descartes' wird also — mit solcher Ausdrücklichkeit wohl zum ersten Mal in der Geschichte der Wissenschaft — eine neue Weise der „Abstraktion“ und eine neue Möglichkeit des „Verstehens“ postuliert. Die „entia abstracta“, von denen hier die Rede ist, sind Erzeugnisse des „bloßen“ oder „reinen“ Verstandes (intellectus purus), der nur insofern „rein“ genannt wird, als die „vis cognoscens“, die er darstellt, frei von aller Beimischung mit „Bildern“ oder „Vorstellungen“ ist („absque ullius imaginis corporeae adjumento“) und ganz „für sich“ ihres Amtes waltet (sola agit — Reg. XII, 416, 4 und 419, 10). In diesem Fall hat es nämlich der intellectus oder die mens nur m i t s i c h s e l b s t zu tun, und nur in diesem Fall kann man von einer „intellectio“, einem „intellegere“ im strengen Sinne sprechen: die mens wendet sich hier gewissermaßen sich selbst zu (vgl. Medit. VI, Ad.-Tann. VII, 73, 15ff.: „... quod mens, dum i n t e l l i g i t, se ad seipsam

---

haberschen Schriften stammt wahrscheinlich von Joh. Remmelin [vgl. Kästner, Gesch. d. Mathem. III, 1799, S. 29—34, 111—152; ferner Ad.-Tann. X, 252—255]) oder auch die etwas älteren „Arithmologien“ von Joach. Camerarius (jun.) und Joh. Lauterbach (vgl. Christ. Primkius, a. ω. Arithmologia Sacro-Profana, Liegnitz 1659; s. ferner Teil I, S. 68) sowie vielleicht das in vielen Auflagen verbreitete (z u l e t z t 1618 erschiene) Werk von Petrus Bungus (Pietro Bongo) „Numerorum Mysteria“ (Erstausgabe 1584 unter dem Titel: „Mysticae numerorum significationis liber“).

[184]) Vgl. hierzu die (von Descartes in La Flèche benutzten) Commentarii collegii conimbricensis, 1592, und zwar Phys. I, 1, 4 (zitiert nach É. G i l s o n, Index scolastico-cartésien, 1913, S. 167): „... res Mathematicae vel cogitatione abjunguntur a materia sensibili tantum, v e l e t i a m a b i n t e l l i g i b i l i. Si priori modo, ad Geometram pertinent; si posteriori a d A r i t h m e t i c u m“. Während für die antike und mittelalterliche Tradition zum Gegenstand der Arithmetik ebenfalls eine „materia intelligibilis“ (eine ὕλη νοητή oder φ α ν τ α σ τ ή) gehört, nämlich die „reinen“ Einsen als solche (vgl. Teil I, S. 50, Anm. 1 und auch S. 98), wird also hier — offensichtlich im Sinne des neuen „Zahl“-Begriffs und im Einklang mit der von Descartes erwähnten Selbst-Interpretation der zeitgenössischen „Rechner“ (vor allem der „Algebraiker“) — der Arithmetik eine besondere „Abstraktions“-Stufe zugewiesen, auf der man nämlich sogar von den res numeratae, d. h. den gezählten Einheiten, den Einsen, „absieht“. Descartes — und, soweit wir sehen, nur er allein — ist bemüht, den genauen Sinn einer solchen „Abstraktion“ zu erfassen, — was aber auch nur für seinen Gedankengang in den „Regulae“ gilt.

quodammodo convertat“ [s. auch „Passions de l’âme“ I, art. XX]) und erblickt dann jeweils eine der „Ideen“, die *ihr selbst* innewohnen („respiciatque aliquam ex ideis, quae *illi ipsi* insunt“ — ebda.), nämlich (Reg. XII, 419, 8 ff.) die „res simplices pure intellectuales“ wie „cognitio“, „dubium“, „ignorantia“, „volitio“ usf. (vgl. Reg. III, 368, 21 ff.) und ferner die „res simplices“, die sowohl dem Bereich des „Geistigen“ als auch dem des „Körperlichen“ angehören und daher „communes“ genannt werden müssen, wie „existentia“, „*unitas*“, „duratio“ usf. (Hierher gehören auch nach Descartes die „communes notiones“, also die traditionellen κοινὰ ἀξιώματα bzw. κοιναὶ ἔννοιαι, wie z. B. der Satz „zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind untereinander gleich“ [Euklid I, κοιν. ἔνν. 1][185]), usf.) Dieser allein auf sich selbst bezogene „reine“ Verstand kann sich aber nun auch den „Ideen“ zuwenden („applizieren“), die ihm die *imaginatio* darbietet, und einzelne Bestandteile dieser „Ideen“ sogar „abtrennen“. In dieser „Zuwendung“ zur imaginatio hört der Verstand, streng genommen, bereits auf, „rein“ zu sein, er behält aber doch das ihm *eigene* — der imaginatio *fremde* — Vermögen bei, eine solche Operation des „Abtrennens“ durchzuführen. Freilich *muß er sich dabei* — im „Gebiet“ des ihm „fremden“ Einbildungsvermögens — *eben dieses Einbildungsvermögens bedienen.* Indem z. B. der „bloße“ oder „reine“ Verstand von einer „vorgestellten“ Menge von Einheiten (einer „Anzahl“ von Einsen also) deren „Mengenhaftigkeit“ als solche, die „sola multitudo“, die „bloße“ (unbestimmte) Vielheit abtrennt, der schlechthin nichts „Wahres“, nichts wahrhaft „Seiendes“ — und also auch keine „wahre Idee“ dieses Seienden — entspricht, bedient er sich des Vorstellungsvermögens, um überhaupt des Abgetrennten habhaft zu werden. Die *imaginative* Kraft, die uns gemeinhin z. B. „fünf Einsen“ (etwa als „Punkte“) „anschaulich“ vorzustellen erlaubt, tritt also hier in den Dienst eines gerade auf „Unanschauliches“ gerichteten Vermögens, nämlich des „reinen Verstandes“, der als solcher, *jedes unmittelbaren Weltbezuges bar*, die „Fünfheit“ als etwas von den „fünf“ gezählten Punkten oder beliebigen Dingen „Abgetrenntes“ und daher nur als „Vielheit überhaupt“, als „bloße“ Vielheit begreift. *Damit macht nämlich die imaginative Kraft eine* **symbolische** *Repräsentation der vom „bloßen“ Verstand „abgetrennten“ unbestimmten Gehalte möglich:* das ist es, worauf Descartes so großen Nachdruck legen muß. Die „Abstraktion“, von der hier die

[185]) Die „actio intellectus“, die in dem „Begreifen“ einer solchen „res simplex“ besteht, nennt Descartes „intuitus“: „mentis purae et attentae non dubius conceptus“ (Reg. III, 368, 18). Ausdrücklich weist er bei dieser Gelegenheit darauf hin, daß der intuitus sich auch auf „diskursive“ Sachverhalte, also auch auf „Verhältnisse“ und „Proportionen“ erstrecken kann und sogar muß (ebda, 369).

Rede ist, müssen wir daher als eine „symbolische Abstraktion" ansprechen. Erst von einer solchen her entsteht überhaupt die Möglichkeit, „Anschauung" und „Begriff" in Gegensatz zueinander zu bringen und die „Anschauung" als eine besondere Quelle der Erkenntnis neben diejenige des Verstandes zu setzen. Die antike ἀφαίρεσις erscheint von hier aus als „direkte" oder „imaginative" Abstraktion (vgl. Reg. IV, 375, 18f.: die Einsichten der antiken Mathematiker „magis ad oculos et imaginationem pertinent, quam ad intellectum"): eben deshalb kann jetzt der antike „Zahl"-Begriff von seiner „Anschaulichkeit" her charakterisiert werden (vgl. Teil I, S. 65f.). Voraussetzung ist hier überall, daß der „reine Verstand" von sich aus überhaupt nicht auf das Sein der Welt und der Weltdinge bezogen ist. Was ihn auszeichnet, ist nicht so sehr seine „Unkörperlichkeit" als eben seine Bezuglosigkeit zu allem Körperlichen. Aber das bedeutet zugleich: die Trennung zwischen ihm und dem „Körperlichen" wird selbst durchaus nach Analogie körperlicher Getrenntheit gedacht. Bezeichnend dafür sind die Beispiele Descartes'. Es müsse begriffen werden, sagt er (Reg. XII, 415, 13ff.), „daß jene Kraft, durch welche wir die Dinge in ihrem Eigentlichen erkennen, eine rein geistige ist und von allem Körper nicht weniger unterschieden [getrennt] ist als das Blut vom Knochen oder die Hand vom Auge ..." (... concipiendum est, vim illam, per quam res proprie cognoscimus, esse pure spiritualem, atque a toto corpore non minus distinctam, quam sit sanguis ab osse, vel manus ab oculo ...). Der „reine" Verstand bedarf, um mit den Dingen der körperlichen Welt („quae extra nos sunt et valde aliena" — Reg. VIII, 398, 13) — und das bedeutet mit der „Welt" überhaupt — in „Kontakt" zu kommen, der Vermittlung eines besonderen Vermögens, eben der imaginatio (Reg. XII, 416f.: „Si ... intellectus [sc. purus] examinandum aliquid sibi proponat, quod referri possit ad corpus, ejus idea, quam distinctissime poterit, in imaginatione est formanda"; vgl. ferner Reg. XIV, 442, 26—28: „... neque in universum nos agnoscere ejusmodi entia philosophica, quae revera sub imaginationem non cadunt"). Wie diese Vermittlung — und das heißt die Beziehung zwischen „Körper" und „Seele" — zu verstehen sei, ist ja bekanntlich die unauflösbare Schwierigkeit der cartesischen Lehre[186]). Für Des-

---

[186]) Von der Tradition aus gesehen kommt einerseits bei Descartes der imaginatio gegenüber dem intellectus purus die Rolle des νοῦς παθητικός (und φθαρτός) gegenüber dem νοῦς ποιητικός zu, welch letzterer allein von Aristoteles als ἀΐδιος, nämlich als χωριστὸς καὶ ἀπαθὴς καὶ ἀμιγής bestimmt wird (De anima Γ 5); andererseits ist die imaginatio bei Descartes eben wesentlich durch den stoischen Begriff der φαντασία bedingt (und hängt damit freilich mittelbar auch mit Aristoteles, De anima Γ 3 und De memoria zusammen — vgl. dazu J. Freudenthal, Über den Begriff des Wortes

cartes selbst ist diese Schwierigkeit nur darum nicht so entscheidend,

---

ΦΑΝΤΑΣΙΑ bei Aristoteles, 1863, bes. S. 29 f.). (Zum Einfluß der Stoa auf Descartes vgl. Brochard, Descartes stoicien, Revue philosophique IX, 1880; vor allem Dilthey, Ges. Schrift. II, 294—296 [über die allgemeine Bedeutung der Stoa für das 16. und 17. Jahrh. s. daselbst S. 93, 153 ff., 174 ff., 181, 255 ff., 261 ff., 279 ff., 285 ff., 441 ff., 486 ff.].) Was die „Regulae" betrifft, so knüpfen sie ja offenbar direkt an das „Studium bonae mentis" an (Ad.-Tann. X, 191—204): ihr allgemeines Thema bildet eben die „bona mens" (von Descartes auch „sapientia universalis" genannt — vgl. Reg. I, 360, 19 f.), ein Begriff, den Descartes, wie es scheint, Justus Lipsius, dem großen Vermittler stoischen Gedankengutes, entnimmt, der ihn seinerseits wahrscheinlich Seneca verdankt. (S. hierzu É. Gilson, Études sur le role de la pensée médiévale dans la formation du système cartésien, 1930, S. 265 f.; vgl. auch Trendelenburg, Hist. Beiträge zur Philos. III, 1867, S. 396. — Der Begriff der „bona mens" ist übrigens nah verwandt, wenn nicht identisch, mit dem der „recta ratio": bei Epictet, Diss. IV, 8, 12, heißt es: τί τέλος [sc. τοῦ φιλοσόφου]; ... τὸ ὀρθὸν ἔχειν λόγον [dazu II, 8, 2, wo die οὐσία θεοῦ als νοῦς, ἐπιστήμη, λόγος ὀρθός bestimmt wird]; andererseits dient der Begriff der „recta ratio" zur Kennzeichnung gerade der ars: so kann man bei Thomas von Aquin [Summa Theol. II, 1, Qu. 57, Art. 3] lesen: „ars nihil aliud est quam ratio recta aliquorum operum faciendorum".) — Die zentrale Schwierigkeit Descartes' muß im Hinblick auf die Überlieferung folgendermaßen gekennzeichnet werden: der intellectus purus wird von ihm faktisch im Sinne des stoischen ἡγεμονικόν (und also „somatisch") verstanden, aber zugleich peripatetisch-thomistisch als νοῦς ποιητικός (und damit als „außerweltliche" Instanz) gedeutet. (Zum ersten vgl. besonders Reg. XII, 415 f., wo die „vis cognoscens", je nachdem sie sich auf die verschiedenen Vermögen bezieht (se applicat), verschiedene „Funktionen" ausübt und entsprechend verschieden benannt wird, nämlich „intellectus purus", „imaginatio", „memoria", „sensus" — dazu Sextus, adv. math. VII, 307: ... ἡ αὐτὴ δύναμις κατ' ἄλλο μέν ἐστι νοῦς, κατ' ἄλλο δὲ αἴσθησις [zitiert nach Bonhöffer, Epictet und die Stoa, 1890, S. 99, auf welches Werk in diesem Zusammenhange überhaupt zu verweisen ist]; s. ferner Bonhöffer, Zur stoischen Psychologie, Philologus LIV, 1895, S. 416; vgl. auch die Auffassung der „helfenden", besser „dienenden" Rolle der verschiedenen „Seelenteile" gegenüber dem intellectus als dem „führenden" und „herrschenden" Vermögen (Reg. XII, Anf.) mit Stobaeus, Eclog. I, 41, 25 [Meineke 252, 1—3]: ... τὸ ἡγεμονικὸν ὡς ἂν ἄρχοντος χώραν ἔχειν ὑπετίθεντο [sc. Stoici], τὰ δὲ ἄλλα μέρη ἐν ὑπηρέτου τάξει ἀπεδίδοσαν ... Zum zweiten vgl. z. B. Gilson, Index scolastico-cartésien, S. 95, Nr. 160.) Eine solche Vermengung aristotelischer (wie auch platonischer) und stoischer Lehren liegt ja schon bei manchen Stoikern selbst, z. B. bei Marc Aurel, vor (vgl. Bonhöffer, Epictet und die Stoa, S. 41 u. 32), andererseits bei Galen, den Descartes sicherlich — sei es direkt, sei es indirekt (durch Telesio) — benutzt (s. hierzu Dilthey, a. a. O., S. 290 ff.; so gehen insbesondere auch Sätze wie die, daß der Ursprung der Nerven im Gehirn liegt oder daß die Übertragung der „Eindrücke" vom sensus externus auf den sensus communis bzw. die phantasia [und folglich auch umgekehrt!] „momentan" geschieht [Reg. XII, 413 f., s. auch Dioptrik, Cap. IV, 5, Ad.-Tann. VI, 598, franz. Text ebda. 111 — vgl. weiter unten S. 224, Anm. 196] auf Galen zurück, z. B. De plac. Hipp. et Plat., passim, bes. S. 208 f., 644 f., 656 [ed. Iw. Mueller, 1874]; zur Zeit der Niederschrift der „Regulae" scheint Descartes den Vesalius noch gar nicht zu kennen, wie er sich ja überhaupt erst seit 1629 dem Studium der Anatomie widmete — s. Ad.-Tann. I, 102, 18 und II, 525; vgl. übrigens auch Galilei, Dialogo sopra i due massimi sistemi del

weil er ihr ursprünglich im Bereich der Mathematik begegnet, dort nämlich, wo es gilt, die traditionelle Bestimmtheit des numerus, die Descartes — im Gegensatz etwa zu Stevin — durchaus nicht verkennt, mit der Unbestimmtheit der neuen „algebraischen" Quantitäten zu versöhnen[187]).

Dies geschieht nun vermittels der symbolischen figürlichen Repräsentation. Es kommt alles darauf an, zu begreifen, daß die „Figuren", mit denen die „Mathesis universalis" umgeht, nämlich „geradlinige und rechtwinklige Flächen" sowie auch „gerade Linien" (vgl. oben S. 208, Anm. 179), ihrer Seinsweise nach nichts mehr mit den „Figuren" der bis dahin üblichen „Geometrie" zu tun haben: „... facile colligitur: hic non minus abstrahendas esse propositiones ab ipsis figuris, de quibus Geometrae tractant, si de illis sit quaestio, quam ab alia quavis materia; nullasque ad hunc usum esse retinendas praeter superficies rectilineas et rectangulas, vel lineas rectas, quas figuras quoque appellamus, quia per illas non minus imaginamur subjectum vere [nämlich in drei „Dimensionen"[188])] extensum quam per superficies ..." (Reg. XIV, 452, 14ff.). Als „magnitudines continuae et indivisae" lassen sowohl „Linien" wie „Flächen" die Aufstellung von Proportionen (und damit Gleichungen) nur zu, sofern das jeweilige

---

mondo, Giorn. seconda, Anf. [Ed. naz. VII, 133 f.]). — Es ist in diesem Zusammenhang sehr bezeichnend, daß Descartes in den „Regulae" die „vis cognoscens" — und das ist zugleich die „bona mens" — „in-genium" nennt („proprie autem ingenium appellatur" — Reg. XII, 416, 8; vgl. den Titel der Schrift: „Regulae ad directionem ingenii"), weil sie entweder von sich aus in der „Einbildung" „Ideen" erzeugt oder umgekehrt von den in der „Einbildung" bereits vorhandenen (nämlich von den Sinnen bewirkten) „Ideen" sich befruchten läßt („cum modo ideas in phantasia novas format, modo jam factis incumbit"). Die Wechselwirkung zwischen intellectus und imaginatio wird hier also durchaus im Sinne der φύσις gedeutet, wobei aber der intellectus eben nicht nur die Rolle des εἶδος, sondern auch die der ὕλη zugewiesen bekommt („interdum patitur, interdum agit" — 415, 23 f.). Mit anderen Worten: die „Außerweltlichkeit" des intellectus bestimmt bei Descartes nicht die Seinsweise des intellectus: der intellectus, die „res cogitans", „ist" in keinem anderen Sinne als der „Körper", die „res extensa". Was beide in gleicher Weise kennzeichnet ist ihre „Bezuglosigkeit". Darum ist es zwar einerseits unmöglich zu verstehen, wie sie „zusammenkommen" können, andererseits aber sind sie für Descartes immer schon „zusammen" — nämlich in der Ebene der „Körperlichkeit".

[187]) Vgl. Baillet, La vie de Monsieur Descartes, 1691, II 486—487 (Ad.-Tann. X, 202f.): „... M. Descartes appelloit les études d'imagination, *méditation*; et celles d'entendement, *contemplation*. C'est là qu'il rapportoit toutes les sciences, mais principalement celles qu'il appelloit *cardinales* ou *originales*, comme la vraye Philosophie, qui dépend de l'entendement, et la vraye Mathématique, qui dépend de l'imagination".

[188]) vgl. Reg. XIV, 442, 17 f.: „Per extensionem intelligimus, illud omne quod habet longitudinem, latitudinem et profunditatem ...".

„gemeinsame Maß“ (die communis mensura) an ihnen, nämlich die betreffende „Einheit“ (unitas) bekannt ist. In diesem Fall lassen sich aber wiederum sofort jene kontinuierlichen Größen als „Zahlen“ verstehen (Reg. XIV, 451 f.: „Sciendum etiam, magnitudines continuas beneficio unitatis assumptitiae posse totas interdum ad multitudinem reduci . . .“), als jene „Zahlen“ nämlich, von denen die „Algebra“ handelt, indem sie z. B. zwischen „A“, „B“ und „C“ Proportionen bzw. Verhältnisse aufstellt (vgl. Reg. VII, Anf.), die nicht mehr das „gemeinsame Maß“ zu berücksichtigen brauchen, weil es hier überhaupt nicht mehr um „Messung“ (mensura), sondern nur noch um „Anordnung“ (ordo) geht: „atque multitudinem unitatum posse postea tali ordine disponi, ut difficultas, quae ad mensurae cognitionem pertine⟨b⟩at, tandem a solius ordinis inspectione dependeat, maximumque in hoc progressu esse artis adjumentum“ (452, 2—6). Eine flächenhafte oder lineare „Figur“ repräsentiert demnach nicht weniger und nicht anders eine „Vielheit oder Zahl“ (multitudinem sive numerum) als sie eine „kontinuierliche Größe“ repräsentiert, ja es ist vor allem die Aufgabe und die eigentliche Funktion einer solchen „Figur“, die „vera idea“ des numerus „abzubilden“. Angesichts einer unbestimmten Vielheit, also jeder „algebraischen“ Quantität, die wir — durch den intellectus purus verführt — als „sola multitudo“, d. h. als ein von jeglichen „res numeratae“ „abgetrenntes“ Gebilde verstehen möchten, müssen wir uns ja — wie wir gesehen haben —, um nicht in Fehler zu verfallen, ein „subjectum aliquod per multas unitates mensurabile“ „vorstellen“, d. h. ein „Bild“ von „Zählbarem überhaupt“ vor Augen halten. Jede „Figur“ ist somit nicht die Darstellung einer bestimmten Anzahl von Maßeinheiten (wie dies bei den geraden Linien in den arithmetischen Büchern Euklids der Fall ist), sondern das durch „symbolische Abstraktion“ gewonnene „Symbol“ einer unbestimmten Vielheit, — also genau das, was in der „Algebra“, speziell in der Vieta'schen Analytik, ein Buchstabenzeichen (samt seiner „Stufen“-Bezeichnung) ist (vgl. S. 182 f.)[189]). Dieser „symbolische“ Charakter der

[189]) Hierbei ist wichtig, daß die „Figuren“ erst mediante unitate als „Zahlen“ erscheinen und die unitas selbst als „mensura“, als Maßeinheit verstanden wird. Das „Maß“ bezieht sich hier freilich nur auf symbolische Gebilde; das ändert aber nichts an der Tatsache, daß Descartes grundsätzlich an dem traditionellen — peripatetischen — ἕν-Verständnis festhält (vgl. Teil I, § 8). Er verfolgt nicht seinen eigenen, davon verschiedenen Ansatz, wonach die unitas eine „res simplex communis“ und also jedenfalls eine res simplex intellectualis ist (s. oben S. 211) — vgl. dazu auch Aristoteles Physik Δ 14, 223 a 21—29.

Descartes unterscheidet übrigens von vornherein zwei Arten von Figuren (duo genera figurarum), nämlich solche, die eine „multitudo“ darstellen, z. B.

•
• •
• • •

cartesischen „Figuren“ macht erst die gegenseitige Entsprechung der „Linien“ und Buchstabenzeichen oder „Chiffren“ in der cartesischen Mathematik möglich (vgl. „Discours“, Ad.-Tann. VI, 20). Ausdrücklich sagt Descartes selbst (Reg. XVI, 455f.: „... advertendum est, ... nos ... hoc in loco non minus abstrahere ab ipsis numeris, quam paulo ante [vgl. oben S. 214] a figuris Geometricis, vel quavis alia re“. Die symbolische Abstraktion, die von den gewöhnlichen numeri zu den Buchstabenzeichen, den „notae“ oder „termini generales“ (457, 20), die auch „puri et nudi“ genannt werden (455, 21), führt[190]), beansprucht die imaginatio genau so, wie wenn sie sich in den „Figuren“ niederschlägt. Nur daß im ersten Fall vor allem auf die bewahrende Fähigkeit der imaginatio, die „memoria“ abgesehen wird (vgl. Reg. XII, 414, 23f. und 416, 1f.[191])), weswegen an Stelle „ganzer Figuren“ (integrae figurae) eben „möglichst kurze Zeichen“ (brevissimae notae) treten (Reg. XVI, 454, 10ff.[192])). Die Seinsweise der „Figuren“ ist

d. i. einen „numerus triangularis“ (→ dreieckige Anzahl [vgl. Teil I, S. 37f., 42, 60f.]), oder

PATER
FILIVS FILIA

d. i. eine genealogische „arbor quae alicujus prosapiam explicat“, und solche, die eine „magnitudo“ darstellen, z. B.

△, □ usf.

(Reg. XIV, 450f.). Damit sind — in beiden Fällen — in durchaus traditioneller Weise nicht-symbolische Gebilde gemeint. Die symbolische „Figur“, die den Gegenstand der Mathesis universalis bildet, ist das „Gemeinsame“ an solchen Figuren, d. h. deren „Figürlichkeit“ überhaupt, mit anderen Worten: die intentio secunda „Figur“ [vgl. Teil I, S. 53f.], — jedoch verstanden als intentio prima. — An der genannten Stelle der „Regulae“ zeigt sich so wiederum der Zusammenhang zwischen den „algebraischen“ Größen und den „figurierten“ Anzahlen, d. i. den pythagoreischen εἴδη der Anzahlen — vgl. Teil I, S. 60f. u. 70, ferner oben S. 183. Es ist möglich, daß Descartes hierin von Adr. Metius abhängig ist (vgl. oben S. 179, Anm. 118), dessen Vorlesungen er übrigens 1629 in Franeker besucht (vgl. Cohen, a. a. O., S. 436f.). Andererseits mag für ihn auch in dieser Hinsicht die Erinnerung an die Schriften Faulhabers maßgebend sein (vgl. oben S. 206, Anm. 176, Ende u. S. 209f., Anm. 183), der von seinem 1604 erscheinenden „Arithmetischen cubiccossischen Lustgarten“ an die Betrachtung der „Polygonal-“ und „Pyramidal-Zahlen“ mit der „cossischen Kunst“ verknüpfte (vgl. Descartes' Abhandlung „De solidorum elementis“, Ad.-Tann. X, 265—276, ferner ebda. 252f., dazu Milhaud, a. a. O., S. 84—87, endlich auch Ad.-Tann. I, 277f.).

[190]) In den „Regulae“ gebraucht Descartes für die bekannten Größen die kleinen Buchstaben a, b, c ..., für die unbekannten die großen Buchstaben A, B, C ... (Reg. XVI, 455, 10ff.).

[191]) Dazu Gilson, Index, S. 138f., Nr. 226; vgl. auch P. Boutroux, L'imagination et les mathématiques selon Descartes, 1900 (Université de Paris, Bibliothèque de la Faculté des lettres, X), S. 16f.

[192]) vgl. Oughtred, Arithmeticae in numeris et speciebus institutio quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est, 1631

also, um es noch einmal zu sagen, keine andere als die der algebraischen „Zahlen“, keine andere als die der „species“ im Sinne Vieta's. Genau dieselbe Umdeutung, die der traditionelle Begriff des ἀριθμός durch Vieta, Stevin und die übrigen zeitgenössischen Algebraiker erleidet, wird von Descartes — und das ist seine originale Leistung — im Bereich der überlieferten γεωμετρία bewirkt. Der wesentliche Unterschied zwischen Descartes und Vieta besteht nicht etwa darin, daß Descartes die „Arithmetik“ und die „Geometrie“ zu einer einzigen Wissenschaft vereinigt, während Vieta an deren Trennung festhält. Beide haben, wie wir gesehen haben, eine universale Wissenschaft im Auge: die „Mathesis universalis“ Descartes' entspricht ganz und gar der Vieta'schen „Zetetik“, die mit Hilfe der „logistice speciosa“ die „neue“ und „reine“ Algebra als allgemeine „analytische Kunst“ verwirklicht (vgl. S. 161f., 175, 192). Während aber Vieta den wichtigsten Teil der Analytik in der „Rhetik“ bzw. „Exegetik“ erblickt (vgl. S. 175f.), bei der in der Tat die numerischen Berechnungen und die geometrischen Konstruktionen zwei verschiedene Anwendungs-Möglichkeiten darstellen und bei der folglich auch die traditionelle Auffassung der Geometrie als solcher gewahrt bleibt, versteht Descartes die geometrischen „Figuren“ von vornherein als Gebilde, deren „Sein“ durch ihren „symbolischen“ Charakter und nur durch diesen bestimmt ist. In Wahrheit „vereinigt“ also Descartes nicht — wie man gedankenlos zu sagen pflegt — die „Arithmetik“ und die „Geometrie“, — er idenfiziert vielmehr die „Algebra“ als symbolische Logistik mit der erstmalig von ihm als symbolische Wissenschaft gedeuteten Geometrie[193]).

---

[s. weiter unten S. 225, Anm. 199], epist. dedic. p. A 3r: „. . . ut ipsas res clarius intuerer, propositiones et demonstrationes [sc. der großen antiken Geometer] verborum integumentis exutas, brevibus tantum symbolis ac notis oculis etiam ipsis uno obtutu perspiciendas designavi . . .“. (Oughtred ist vor allem von Vieta, aber wohl auch von Stevin abhängig.)

[193]) Neben der altüberlieferten pythagoreischen Eidetik (vgl. S. 216, Anm. 189) bildet zweifellos die Darstellung der „latitudines formarum“ durch Nicolaus Oresmus (Mitte des 14. Jahrh.) eine wesentliche Quelle für die figürliche Symbolik Descartes'. Vgl. den Anfang der anonymen Schrift „De latitudinibus formarum secundum doctrinam magistri Nicolai Horem“ (kurze Bearbeitung eines Teiles des umfangreichen Werkes von Oresmus: „De uniformitate et difformitate intensionum“ [dazu P. Duhem, Études sur Léonard de Vinci, III, 1913, S. 376ff. und 399f.; ferner Wieleitner, Der „Tractatus de latitudinibus formarum“ des Oresme, Bibl. math. 3. Folge, 13. Bd., 1912—1913, S. 115—145; ders., Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme, Bibl. math. 3. Folge, 14. Bd., 1913—1914, S. 193—243; neuerdings E. Borchert, Die Lehre von der Bewegung bei Nicolaus Oresme, Beitr. z. Gesch. d. Philos. u. Theol. d. Mittelalt., Bd. XXXI, Heft 3, 1934, S. 19f. und 92—100]; dem Verfasser standen die Ausgaben von 1486 [Padua] und die von 1515 [Wien] — letztere aus dem Besitz Tycho Brahe's — zur Ver-

Wir können nun, gestützt auf die Angaben Descartes' und unter Berücksichtigung der zeitgenössischen Schul-Literatur, den bereits mehr-

---

fügung): „Formarum quia latitudines multipliciter variantur multiplices varietates difficilime discernuntur: nisi ad figuras geometricas quodammodo referuntur. Ideo premissis quibusdam diuisionibus latitudinum cum diffinitionibus suis: species infinitas earumdem ad figurarum species infinitas applicabo ex quibus propositum clarius apparebit" mit Descartes' Regula XII (413, 11 ff.): „quid igitur sequetur incommodi, si ... concipiamus diversitatem, quae est inter album, coeruleum, rubrum, etc., veluti illam, quae est inter has aut similes figuras [von Descartes durch Zeichnung angegeben], etc.? Idemque de omnibus dici potest, cum figurarum infinitam multitudinem omnibus rerum sensibilium differentijs exprimendis sufficere sit certum". — Bei Oresmus ist übrigens außer von Bewegungen, Veränderungen, Wärmezuständen usf. ausdrücklich auch von Farben die Rede (s. weiter unten). — Vgl. ferner den Anfang des Traktats „De uniformitate et difformitate intensionum" nach dem von Borchert, a. a. O., S. 92—93, Anm. 175 und 177 mitgeteilten Text: „Omnis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitatis continue. Ideo oportet pro eius mensuratione ymaginari puncta, lineas et superficies aut istorum proprietates. In quibus ut uult philosophus mensura et proportio per prius reperitur. In alijs autem cognoscuntur in similitudine dum per intellectum referuntur ad ista ..." und ebda., S. 94 f., Anm. 180: „... uniformitas eius [sc. qualitatis] atque difformitas cicius, facilius et clarius perpenduntur quando in figura sensibili aliquod simile describitur quod ab ymaginatione velociter et perfecte capitur et quando in exemplo visibili declaratur ... multum enim iuuat ad cognitionem rerum ymaginatio figurarum".

Daß Descartes die „quantitative" Darstellung von „Qualitäten", wie sie von Oresmus ausgebildet und seitdem immer wieder angewandt worden war (vgl. Duhem, Études III, 399—405; 481 ff.; bes. auch 502—504), in irgend einem Sinne „kannte", beweist seine Behandlung der (ihm Ende 1618 von Beeckman vorgelegten) Frage nach dem freien Fall der Körper im Leeren (Ad.-Tann. X, 75—78; vgl. 219—221). Er faßt die jeweilige „Intensität" (Geschwindigkeit) der Bewegung als eine gerade Linie auf, die auf einer anderen Geraden senkrecht steht, die ihrerseits der gesamten vom fallenden Körper durchlaufenen Strecke (nicht Zeitstrecke!) entspricht. Damit wird die Bewegung als solche durch eine „Figur", nämlich hier durch ein (gleichschenkliges) rechtwinkliges Dreieck, wiedergegeben. Es ist leicht zu sehen, daß sich Descartes über den Sinn der Frage nicht ganz im klaren ist (vgl. Duhem, Études III, 566—574; Wieleitner, Das Gesetz vom freien Falle in der Scholastik, bei Descartes und Galilei, Zeitschr. für math. u. naturwiss. Unterr. etc., 45, 1914, S. 216—223; Milhaud, a. a. O., S. 26—34): während Beeckman nach dem Zusammenhang der im freien Fall durchlaufenen Strecken mit den dazu benötigten Zeiten forscht, läuft die Argumentation Descartes' darauf hinaus, zwischen den Geschwindigkeiten und den durchlaufenen Strecken einen Zusammenhang zu stiften. Faßt man jedoch die Strecken-Gerade bei Descartes als Zeit-Gerade auf — was Beeckman in seiner Interpretation der Descartes'schen Antwort tatsächlich tut, ohne zu merken, daß er damit Descartes korrigiert (vgl. Ad.-Tann. X, 58—61) —, so ergibt sich auch die richtige Lösung der gestellten Frage. — Auch späterhin durchschaut Descartes diesen Sachverhalt nicht (s. besonders Ad.-Tann. I, 71—75 und 394 f. — dazu Milhaud, a. a. O., S. 30—32; Wieleitner, a. a. O., S. 222) und andererseits verwechselt Galilei 1604 (Ed. naz. X, 115 f. und VIII, 373 f. — vgl. auch VIII, 203 u. 208 ff., ferner VII, 248 ff.) in ganz ähnlicher Weise die Zeitstrecke mit der durchlaufenen

fach umrissenen begrifflichen Charakter der algebraischen Symbole

Strecke (vgl. Duhem, Études III, 562—566; Wieleitner, a. a. O., 223—228). Das alles wird erst verständlich, wenn man sich klar macht, daß es Descartes — wie wohl auch Galilei — zunächst nicht so sehr darauf ankommt, eine „Bewegung" mit Hilfe eines Linien-(„Koordinaten"-)Systems zu erfassen, wofür natürlich die richtige Wahl der „Variablen" entscheidend wäre, als darauf, „Bewegung" überhaupt figürlich darstellen zu können. Vgl. Ad.-Tann. X, 220, 5—9: „Ut autem hujus scientiae fundamenta jaciam, motus ubique aequalis linea repraesentabitur, vel superficie rectangula, vel parallelogrammo, vel parallelepipedo; quod augetur ab una causa, triangulo; a duabus, pyramide . . . [vgl. dazu Wieleitner, a. a. O., S. 221—222; ferner Duhem, Études III, 386—388 und auch 517—519], a tribus, alijs figuris". Und Descartes verweist bemerkenswerterweise in eben demselben Zusammenhang ausdrücklich auf seine „Algebra geometrica" (X, 78, 23), deren Darstellung ja die späteren „Regulae" — nun allerdings mit universalerem Anspruch — gewidmet sind.

Auch bei Oresmus dient — was gegenüber den üblichen Darstellungen, gegen die sich bereits Wieleitner in den oben angegebenen Aufsätzen der „Bibliotheca mathematica" gewandt hatte, besonders hervorgehoben werden muß — die „Geometrisierung" des Begriffs der „intensio formae" (= excessus gradualis = latitudo gradualis [a. a. O., Pars II, Cap. II, Suppositio 3; vgl. Supp. 9]) zu nichts anderem als zur figürlichen Darstellung von „Qualitäten" oder „Intensitäten" (vgl. Pars II, Cap. III): es können dies entweder „formae permanentes" wie Farben (colores), Wärmezustände (calores) usf. sein oder „formae successivae" wie Veränderungen (alterationes) und Bewegungen (motus locales) — vgl. Pars II, Cap. II, Supp. 13 und die Schlußbemerkungen von Cap. III. Die Suppositio 9 (Pars II, Cap. II) setzt dabei fest: „extensio forme ymaginanda est per lineam rectam: intensio vero per figuram planam super rectam consurgentem" (vgl. Supp. 12: der „intensio totalis forme date" [dem „Integral"] entspricht die „superficies super rectam lineam collocata"; Oresmus kannte aber auch die Repräsentation durch körperliche Figuren [Wieleitner, Bibl. math. 3. Folge, 14. Bd., S. 204 u. 214—216; Duhem, Études III, 386—388]; nicht zu vergessen sind die überlieferten Titel seiner Schrift: „De figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum" und „De configuracionibus qualitatum"). Je nach der Art der Intensitätsänderung wechselt diese „figura repraesentativa". Im Falle einer stets gleichbleibenden Änderung der Intensität (uniformis latitudinis variatio) ergibt sich eine „latitudo uniformiter difformis", die durch ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt wird. Dies gilt insbesondere von der gleichförmig ungleichförmigen Bewegung (vgl. Duhem, Études III, 388 ff.; Wieleitner, Bibl. math. 3. Folge, 14. Bd., S. 222 ff.). Daß diese wiederum sich in dem speziellen Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung von frei fallenden Körpern verwirklicht findet, ist nun zwar seit Albert von Sachsen (vgl. Duhem III, 309—314) Gemeingut der nominalistischen Schulwissenschaft, doch wird diese Einsicht erst sehr viel später mit der graphischen Darstellung des Oresmus verknüpft (s. Duhem III, 556 ff.). Jedenfalls aber finden Galilei, Beeckman und Descartes auch in diesem Punkte eine feste Überlieferung vor. — Genau wie bei Descartes (Reg. XIV, 440) wird ferner bei Oresmus etwas als ein „Quantum" (als ein „Quantitatives" oder als „magnitudo") begriffen, wenn es dem „Mehr und Weniger", dem „Übertreffen- und Zurückbleiben-können" (vgl. Teil 1, S. 93, Anm. 3) unterliegt (Descartes: „quod recipit majus et minus" [vgl. weiter unten S. 222]; Oresmus [Pars II, Cap. II, Supp. 2]: „omne quod excessu graduali excedit aliud vel exceditur ab alio est imaginandum per modum quantitatis"), d. h. also Verhältnissen und damit auch Proportionen unterworfen werden kann (Oresmus [II, II, Supp. 1]: „Omnia que secundum aliquam proporcionem [= Verhältnis] se habent adinuicem ratione parti-

noch genauer festlegen. — Wir hatten gesehen, daß Descartes die „sola multitudo", die der intellectus von der in der imaginatio vorfindlichen „Idee" des numerus „abtrennt", als ein „ens abstractum" bezeichnet, welches ens in der Sprache der Schule auch „ens rationis" genannt wird. In der „Summa" des Eustachius a Sancto Paulo, IV, 17—19 (zitiert nach Gilson, Index, S. 107) werden drei Arten von „entia rationis" aufgezählt: „. . . entia rationis aut sunt negationes,

---

cipant quantitatis", wobei diese quantitas entweder „in wahrhafter Weise" oder auch nur „in vorgestellter Weise" [vere vel ymaginative] eine quantitas ist). — Ebenso scheint der „Dimensions"-Begriff Descartes' in den „Regulae" (447—449; vgl. dazu übrigens auch die Aufzeichnung Beeckmans: X, 334, ferner II, 542) unmittelbar mit der Lehre des Oresmus zusammenzuhängen (II, II, Supp. 5, 6, 7 u. 8). — Oresmus selbst steht, vor allem was die Bevorzugung des Verhältnis (= „proportio")-Begriffs betrifft, in der von Bradwardinus, dem „doctor profundus", bestimmten Tradition. U. a. geht auch die Unterscheidung der „formae permanentes" und der „formae successivae" auf eine entsprechende Unterscheidung des Bradwardinus zurück (vgl. Cantor II², 113 ff.; 118 f.; ferner Duhem III, 294 ff.; Auszüge aus den einschlägigen Texten bei Max. Curtze, Über die Handschrift R. 4⁰. 2, Problematum Euclidis explicatio der Königl. Gymnasialbibliothek zu Thorn, § 11: „Geometria Bradwardini" und § 9: „Algorismus proportionum magistri Nicolay Orem", Zeitschr. f. Math. u. Phys., 13. Jahrg., Supplement, 1868, SS. 81—84; 65—79 und 101—104; vgl. auch oben S. 165, Anm. 98a).

Gegenüber der Überlieferung besteht das Eigentümliche der Bewegungsdarstellung Descartes' darin, daß die figürliche Repräsentation sich bei ihm sofort mit der Lehre von den figurierten Anzahlen verbindet. So führt ihn der ihm von Beeckman vorgegebene Satz: „quod semel movetur, semper movetur, in vacuo" (oder: „mota semel nunquam quiescunt, nisi impediantur" — vgl. Ad.-Tann. X, 60, 78 u. 219) zu der Behauptung, die Bewegung (genauer: die Bewegungskraft) stelle stets einen „numerus triangularis" dar, der eben durch eine „figura triangularis" wiederzugeben sei (X, 76, 2—4). Damit scheint sich Descartes bedenklich der Meinung von Leonardo da Vinci (Duhem III, 512 f. und Tannery, Mém. scient. VI, 482) und der von Baliani (Cantor II², 698 f.) zu nähern, wonach bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die in aufeinanderfolgenden Augenblicken durchlaufenen Strecken sich wie die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 . . . verhalten. Doch gelingt es Descartes — was gegenüber dem Verfahren des Oresmus völlig neu ist — mit Hilfe des „Indivisibilien"-Begriffs (vgl. Duhem II, 1909, S. 7 ff.) ohne weiteres zur Reihe $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \ldots$ überzugehen, die ihm überhaupt erst von der dreieckigen „Figur" Gebrauch zu machen gestattet.

Was endlich die Verwendung von Koordinaten in der späteren „Geometrie" Descartes' betrifft, so hat sie nichts mit der „qualitativen Geometrie" des Oresmus zu tun; sie hängt vielmehr unmittelbar mit dem entsprechenden Verfahren des Apollonius zusammen, — was bekanntlich genau so für Fermat gilt. Das Operieren mit „Koordinaten" hat freilich bei Descartes in der oben dargelegten Idee seiner allgemeinen Algebra (und damit also mittelbar auch in der Lehre des Oresmus) ein viel tieferes Fundament als bei Fermat. Darum gibt sich auch Descartes viel besser Rechenschaft über den Sinn der „Generalisierung", die das Verfahren des Apollonius in seinen und Fermat's Händen erfährt (vgl. Fermat's Äußerungen zu dieser „Generalisierung" in seiner „Isagoge ad locos planos et solidos", Oeuvres [Tannery-Henry] I, S. 91, 93 u. 99).

aut privationes, aut secundae intentiones ...". Die beiden ersten Arten kämen den seienden Dingen in gewisser Weise vor allem Tun des Verstandes zu („duo priora [sc. genera] rebus suo modo conveniunt citra omnem operationem intellectus"); nur die dritte Art verdanke ihr „Sein" allein dem Tun des Verstandes: „postremum vero genus non nisi praesupposita aliqua intellectus operatione rebus competit, unde illa [sc. entia rationis] dicuntur pendere ab intellectu quoad existentiam et convenientiam"; daher werde unter „ens rationis" im eigentlichen und strengen Sinne des Wortes eben nur diese letzte Art verstanden („quo fit ut ens rationis proprie et presse sumptum pro isto postremo duntaxat genere accipiatur"). So ist also in der Tat die „sola multitudo", die bloße Vielheit, die Mengenhaftigkeit als solche, die nur von Gnaden des „intellectus purus" ein „Sein" hat, ein ens abstractum bzw. ein ens rationis im Sinne einer „intentio secunda" (vgl. oben S. 182 und 200, ferner S. 216, Anm. 189). Die „intentio secunda" wird nun genauer von Eustachius a Sancto Paulo — unter Berufung auf den herrschenden Sprachgebrauch — als ein ens rationis bestimmt, „das einem erkannten Ding nur von seinem Erkanntwerden her zukommend gedacht wird und das in keinem anderen Sinne ‚sein' kann, als daß es für den Verstand gegenständlich ist: denn es wird ja [nicht ursprünglich, sondern] nachträglich und durch ein auf sich selbst bezogenes Tun des Verstandes erfaßt" (quod concipitur accidere rei cognitae, ex eo quod cognita est, quodque non aliter potest existere quam objective in intellectu, cum secundario et per reflexam mentis operationem concipitur). Jener Vorgang des „Abtrennens", bei welchem der „intellectus purus" sich ins „Gebiet" der ihm „fremden" imaginatio begibt (vgl. S. 211), muß also genauer in folgender Weise beschrieben werden. Der intellectus, ausgerichtet auf die ihm von der imaginatio dargebotene „Idee" eines numerus als einer „multitudo unitatum" (πλῆθος μονάδων — vgl. Teil I, S. 57), wendet sich — seiner eigenen Natur gemäß — diesem seinem Ausgerichtetsein, seinem Erkennen selbst zu (vgl. S. 210f.): er erblickt damit die multitudo unitatum nicht mehr „direkt", nicht mehr im „actus exercitus" (vgl. Teil I, S. 55), sondern „indirekt", „secundario" oder — wie ein anderer Ausdruck der Schule lautet — im „actus signatus". Unmittelbar „gegenständlich" ist ihm jetzt sein eigenes Begreifen jener „multitudo unitatum", der „Begriff" (conceptus) des numerus als solcher, — aber doch in der Weise, daß ihm diese multitudo selbst als „Etwas" erscheint, nämlich als Eines und darum als „ens". Darin eben besteht die „abstractio", die der intellectus vornimmt, daß er die Vielheit am numerus in ein scheinbar „selbständig" Seiendes — in ein „ens", wenn auch nur in ein „ens rationis" — verwandelt. Indem nun — und dies ist der entscheidende

Vorgang — das „ens rationis" als „intentio secunda"[194]) mit Hilfe der imaginatio in der Weise faßbar wird, daß der intellectus es wiederum als „intentio prima" aufzunehmen vermag, haben wir es mit einem — Symbol zu tun: entweder mit einem „algebraischen" Buchstabenzeichen oder mit einer „geometrischen" Figur, wie sie Descartes versteht. In diesem Sinne haben wir oben von einer „symbolischen Abstraktion" gesprochen. —

Inwiefern bildet aber nun die imaginatio für Descartes eine Brücke zur Welt der „Körper"? Inwiefern vermag mit ihrer Hilfe die Mathesis universalis zugleich zur „wahren Physik" zu werden? — Im Hinblick auf den intellectus ist die imaginatio durch ihre „Dienstleistung" bestimmt, die die Möglichkeit symbolischer Erkenntnis und insbesondere die Möglichkeit der Mathesis universalis als allgemeiner Proportionen- und Gleichungs-Lehre gewährleistet. Proportionen und Gleichungen — so argumentiert Descartes in der Reg. XIV — kann nur dasjenige unterworfen werden, „was das Mehr und Weniger aufnimmt" (quod recipit majus et minus), das heißt also all das und nur das, was wir mit dem Namen „Größe" (magnitudo) bezeichnen (vgl. den Begriff des μέγεθος in Euklid V). In diesem Sinne hat es die Mathesis universalis nur mit „Größen im allgemeinen" (magnitudines in genere) zu tun, die — wie wir hinzufügen dürfen — der intellectus als „entia abstracta" begreift. Da wir jedoch genötigt sind — wie wir bereits wissen —, uns von der imaginatio „helfen" zu lassen, werden wir von „speziellen" Größen handeln müssen, die wir wenigstens so wählen können, daß sie sich unserem Zugriff möglichst leicht fügen. Diese Forderung erfüllt nun eben die wirkliche extensio der Körper, d. i. ihre Körperlichkeit als solche, bei der wir von allem anderen als ihrer „Figürlichkeit" absehen. Und gerade diese Natur der Körperlichkeit kommt nach Descartes der imaginatio bzw. der phantasia mit allen „in" ihr vorhandenen „Ideen" zu: „Ut vero aliquid etiam tunc [sc. bei der Behandlung der magnitudines in genere] imaginemur, nec intellectu puro utamur, sed speciebus in phantasia depictis adjuto: notandum est denique, nihil dici de magnitudinibus in genere, quod non etiam ad quamlibet in specie possit referri. Ex quibus facile concluditur, non parum profuturum, si transferamus illa, quae de magnitudinibus in genere dici intelligemus, ad illam magnitudinis

[194]) Streng genommen: als der intendierte Gegenstand einer intentio secunda — vgl. Eust. a Sto. Paulo (a. a. O.): „. . . quid sit secunda intentio. Respondetur secundam intentionem, si vim nominis spectes, esse ipsam mentis operationem, qua secundario [d. i. actu signato] tendit in rem jam antea cognitam, quatenus cognita est" (folgt die oben S. 221 zitierte Bestimmung gemäß dem „usus", der darunter den intendierten Gegenstand selbst versteht).

speciem, quae omnium facillime et distinctissime in imaginatione nostra pingetur: hanc vero esse extensionem realem corporis abstractam ab omni alio, quam quod sit figurata, sequitur ex dictis ad regulam duodecimam, ubi phantasiam ipsam cum ideis in illa existentibus nihil aliud esse concepimus, quam verum corpus reale extensum et figuratum" (Reg. XIV, 440f.)[195]. Alles, was wir von der „Welt" mit Hilfe der „äußeren Sinne" (sensus externi) empfangen, wird — über den „sensus communis" — durch eine Reihe von „Siegelabdrücken" auf die imaginatio übertragen, und zwar in der Weise, daß die von den „Eindrücken" (impressiones) betroffenen Körperteile — einschließlich der imaginatio — die Gestalt, die „Figur" annehmen, die dem den Eindruck hervorrufenden Welt-Teil zukommt (vgl. Reg. XII, 412ff.). Dies ist nicht etwa metaphorisch zu verstehen, wie Descartes ausdrücklich betont („neque hoc per analogiam dici putandum est"): genau wie bei einem Siegelabdruck werden den empfangenden Teilen des Leibes — bis zur imaginatio hinauf — die Konturen des betreffenden Welt-Teiles „realiter" „eingeprägt", wobei wir unter „Welt-Teil" hier alles verstehen müssen, was vermittels von „Bewegung" (motus localis) in unmittelbare „Berührung" mit den „Organen" unseres Körpers gelangt[196]. Die „Dienst-

[195]) Vgl. Reg. XII, 414: „. . . concipiendum est, . . . hanc phantasiam esse veram partem corporis, et tantae magnitudinis, ut diversae ejus portiones plures figuras ad invicem distinctas induere possint . . ."; ferner Reg. XIV, 442: „. . . nihil omnino facilius ab imaginatione nostra (percipitur)" als die extensio.

[196]) Innerhalb dieses Gedanken-Zusammenhanges läßt sich genau der Anteil der Tradition von dem spezifisch „Neuen" Descartes' trennen (was Dilthey, a. a. O., S. 295 ganz zu übersehen scheint). Die Lehre von den „Eindrücken", den τυπώσεις — und zwar gerade in Bezug auf die imaginatio — ist zunächst einmal wiederum eindeutig stoisch: φαντασία οὖν ἐστί κατ' αὐτοὺς [sc. τοὺς Στωϊκούς] τύπωσις ἐν ψυχῇ (vgl. Sextus, adv. math. VII, 228; dazu auch VII, 372 und VIII, 400 = Arnim, Stoic. vet. fragmenta I, fr. 484, ferner Sextus, adv. math. VII, 236 = Arnim I, fr. 58), und geht darüber hinaus auf Aristoteles (und Plato) zurück (Aristoteles, De memoria 1, 450 a 30—32: ἡ γὰρ γιγνομένη κίνησις [dazu De anima Γ 3, 429 a 1f.: ἡ φαντασία ἂν εἴη κίνησις ὑπὸ τῆς αἰσθήσεως τῆς κατ' ἐνέργειαν γιγνομένη] ἐνσημαίνεται οἷον τύπον τινὰ τοῦ αἰσθήματος, καθάπερ οἱ σφραγιζόμενοι τοῖς δακτυλίοις [vgl. De anima B 12, 424 a 17ff.]; Plato, Theaet. 191 C ff.). Immer aber wird in der antiken Philosophie die τύπωσις in der Weise verstanden, daß der jeweilige „Abdruck" in der Seele dem Aussehen des Dinges entspricht, wie es sich eben unseren („äußeren") Sinnen darbietet. Selbst bei Kleanthes, der die τύπωσις ganz wörtlich, nämlich κατὰ εἰσοχήν τε καὶ ἐξοχήν, ὥσπερ καὶ ⟨τὴν⟩ διὰ τῶν δακτυλίων γιγνομένην τοῦ κηροῦ τύπωσιν (Arnim I, fr. 484), nimmt, ist damit der Abdruck des εἶδος des betreffenden Dinges gemeint. Die übrigen Stoiker verstehen mit Chrysipp und Zeno — und gewiß auch mit Aristoteles — den Terminus τύπωσις überhaupt nur als Metapher, — wogegen eben Descartes ausdrücklich Stellung nimmt (vgl. dazu auch Dioptrik, Cap. IV, 6—7: Ad.-Tann. VI, 599f. [franz. Text ebda. S. 112ff.], ferner Principia philosophiae IV, 197—198). Vor allem aber ist die cartesische Auffassung des Vorgangs darin vollkommen original, daß er

leistung" der imaginatio beruht also auf der „realen" — nicht „bildlichen" — „Wiedergabe" der Körperwelt: die imaginatio stellt jeweils gerade dasjenige an der Körperwelt wirklich dar, was deren wahrhafte Natur, deren „Substanz", deren „Körperlichkeit" ausmacht, nämlich die „figurierte" extensio als solche. (Der intellectus macht allerdings hierbei nur von ihrer flächenhaften und linearen Erstreckung Gebrauch[197]). Darum also und nur darum bietet die imaginatio die Gewähr dafür, daß die „Mathesis universalis" auch den Aufbau der „wahren Welt" zu erfassen und sich damit in der Tat als eine „scientia mirabilis" zu erweisen vermag.

---

alles durch die (äußeren) Sinne Wahrnehmbare, also neben den „Dingen" selbst auch die Farben, das Warme, Kalte, Harte, Rauhe, Süße usf. auf „Figuren" reduziert, die die wahre, d. h. den äußeren Sinnen gerade nicht zugängliche „Natur" der betreffenden „Dinge" oder „Kräfte" oder „Eigenschaften" darstellen sollen („quid ... sequetur incommodi, si ... abstrahamus ab omni alio, quam quod habeat [sc. color, der hier als Beispiel genommen ist] figurae naturam" — X, 413): die Verschiedenheit dieser „Dinge", „Kräfte" oder „Eigenschaften" erweist sich dann als in der Verschiedenheit der unendlich vielen möglichen „Figuren" wurzelnd, von denen Descartes einige durch Zeichnung angibt (ebda.). Eben diese wahre Natur der Welt-Teile „erblickt" der intellectus in der „Zuwendung" zu den „Abdrücken" „in" oder „auf" dem Teil des Gehirns, der die „phantasia vel imaginatio" ist. — Diese Auffassung der Wahrnehmungsvorgänge, die Descartes hier nur als suppositio einführt, hat in der weiteren Entwicklung seiner Gedanken manche Änderungen erfahren, vor allem durch die stärkere Betonung der „Bewegung" der „Figuren", die sich letztlich in „Bewegung" innerhalb der Zirbeldrüse umsetzt (vgl. dazu übrigens Aristoteles, De anima Γ 3, 428 b 10 ff.), und durch die Lehre von den „spiritus animales", die ja ihrerseits ebenfalls auf antike Quellen, insbesondere auch auf Galen zurückgeht. Doch bleibt dieser ursprüngliche Entwurf — namentlich hinsichtlich des Verständnisses der extensio — nicht nur die Grundlage der späteren Schriften Descartes', sondern auch die — eingestandene oder uneingestandene — faktische Voraussetzung aller modernen Physiologie und physiologischen Psychologie, — und zwar bis auf den heutigen Tag (vgl. hierzu u. a. die prägnanten Formulierungen bei Euler, Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie II, 1770, Brief 94 und 96, S. 63 ff.; 72 ff.). — Nicht unwichtig ist die Tatsache, daß sich für Descartes später der Unterschied zwischen der „phantasia" und dem „sensus communis" verwischt: vgl. Medit. VI, Ad.-Tann. VII, 86, 16 ff. und auch Le Monde, Traité de l'Homme, Ad.-Tann. XI, 174 ff. (dazu Aristoteles, De memoria 1, 450 a 10 f.: ... τὸ φάντασμα τῆς κοινῆς αἰσθήσεως πάθος ἐστιν, ferner die aristotelische Lehre, wonach die κοινὴ αἴσθησις wesentlich auf die „κοινά" bezogen ist, als da sind: κίνησις, στάσις, σχῆμα, μέγεθος, ἀριθμός, ἕν [De anima Γ 1, 425 a 14 ff. und B 6, 418 a 16—19] — vgl. oben S. 156, Anm. 81). Descartes versteht hier offenbar — im Einklang mit der zeitgenössischen Psychologie (vgl. Gilson, Index, S. 267) — beide, die „phantasia" und den „sensus communis", gegenüber den „sensus externi" als zwei Vermögen des sensus internus, die sich nur durch die „diversitas officiorum", „non natura et specie" unterscheiden.

[197]) vgl. Cogitationes privatae X, 217, 12: „... imaginatio utitur figuris ad corpora concipienda ..." (die Fortsetzung dieser Stelle zeigt die ganze Bedeutung, die Descartes — jedenfalls in seiner Frühzeit — der vis imaginationis beimaß; vgl. auch S. 214, Anm. 187).

Die extensio hat demnach bei Descartes einen zwiefachen Charakter: einen „symbolischen“ — als Gegenstand der „allgemeinen Algebra“, und einen „realen“ — als „Substanz“ der körperlichen Welt. Genauer gesagt: was ihr im Denken Descartes' die Würde des substanziellen „Seins“ der körperlichen Welt verleiht, ist gerade ihre symbolische Gegenständlichkeit im Rahmen der Mathesis universalis. Damit erst ist das begriffliche Fundament der „klassischen“ Physik geschaffen, das man seither den „euklidischen Raum“ genannt hat. Auf diesem Fundament wird Newton das Gebäude seiner mathematischen Natur-Wissenschaft errichten[198]).

C.

Die endgültige Einführung des neuen „Zahl“-Begriffs vollzieht Wallis (1616—1703), der einerseits durch Vermittlung von Harriot's „Artis analyticae praxis“ (vgl. oben S. 190ff., Anm. 145) und von Oughtred's „Clavis mathematicae“[199]) in der von Vieta begründeten Tradition steht, andererseits vor allem dem Einfluß Descartes' — und auch demjenigen Stevin's — unterliegt. — Bei Wallis, der seine mathematischen Darlegungen mit eingehenden historisch-philologischen Erörterungen zu verbinden pflegt (die allerdings nicht immer zuverlässig sind) und so dem echten Sinn der antiken Bestimmungen viel eher gerecht zu werden vermag als seine Vorgänger, können wir die Umdeutung, die die antiken Begriffe im Rahmen der symbolischen Begrifflichkeit erfahren, zum letzten Mal, und zwar besonders deutlich, erkennen. Er ist überall bemüht, im Einklang mit der antiken Terminologie zu bleiben, und wenn er von ihr abzuweichen gezwungen ist, so gibt er dafür stets eine genaue Begründung, wobei er in „scholastischer“ Manier Distinktionen einführt, die es ermöglichen sollen, die traditionellen Bestimmungen neben den neuen bestehen zu lassen.

[198]) vgl. dazu auch Descartes' Principia philosophiae II, 64. — Die weitere Entwicklung Descartes' führt ihn dazu, die Sicherheit der „klaren und deutlichen“, vor allem also mathematischen Erkenntnis — und folglich auch die Möglichkeit einer „wahren Physik“ — auf dem Umwege über die Metaphysik letztlich durch Gott gewährleisten zu lassen. Damit tritt die Bedeutung der imaginatio im cartesischen System immer mehr zurück, womit aber ihre Stellung — namentlich im Hinblick auf die Erfassung der extensio — nur noch fragwürdiger wird. Der Charakter der extensio selbst bleibt jedoch durch diese Entwicklung im Wesentlichen unberührt.

[199]) Beide Werke erscheinen 1631, sind aber früher geschrieben: Harriot stirbt 1621, Oughtred 1660, doch erklärt Wallis ausdrücklich, daß Harriot sein Buch später als Oughtred oder etwa zu gleicher Zeit verfaßt habe (vgl. Wallis, Mathesis Universalis, Opera I, 1695, p. 55; auch Algebra, Opera II, 1693, Praefatio pp. a 3r et v und 136ff.). Der genaue Titel der Clavis mathematicae lautet: „Arithmeticae in numeris et speciebus institutio quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est“. (Vgl. zu Oughtred's Werk Cantor II², 720f. und Wallis, Algebra, a. a. O., p. 71—73; ferner oben S. 216f., Anm. 192.)

Im Kapitel II seiner „Mathesis universalis“ (1657)[200]) wird die „unitas“ immer noch als „principium numeri“ und entsprechend der „numerus“ als „unitatum multitudo“ eingeführt, aber ausdrücklich nur mit Rücksicht auf die „üblichen“ Bestimmungen (p. 20: „Principia quod attinet: *Punctum* quidem magnitudinis, *Unitas* autem numeri, principium vulgo perhibetur ...; cum numerus vulgo definiatur, Unitatum multitudo“). Im Kapitel IV wird dann ausführlich die Frage erörtert: „an Unitas sit Numerus“ (p. 24—27) und in unmittelbarem Zusammenhang damit auf das Problem der „Null“ eingegangen. Wallis verfehlt nicht, auf die entscheidende Bedeutung der Frage nach dem wahren „principium numeri“ hinzuweisen. Leitend ist für ihn — nun bereits in ganz selbstverständlicher Weise — die völlige Parallelisierung des „arithmetischen“ und des „geometrischen“ Verfahrens: „Insignis enim est hujusce rei utilitas, praesertim in Analytices sive Algebrae speculationibus; quo melius operationis Arithmeticae cum Geometricis constructionibus congruentia percipiatur“. Er beruft sich hierbei auf Descartes und Franz van Schooten[201]), während doch in dieser Frage — wie wir gesehen haben — Stevin die wichtigste Rolle zuzuweisen ist (vgl. S. 199 ff.). Die Frage nach dem „principium numeri“ muß nach Wallis folgendermaßen entschieden werden: die Eins ist Zahl, denn „Eins“ gibt eine Antwort auf die Frage: „Wieviel sind es?“ (Quot sunt). Genauer: „wenn ich behaupte, daß ‚vier‘ soviel besagt wie ‚vier Einsen‘, so ist ‚Einsen‘ [hier] weder Zahl noch Bestandteil einer Zahl, sondern entweder die Zahl-Benennung bzw. der Zahl-Nenner oder das Gezählte selbst. Dagegen ist ‚vier‘ die Zahl dieser Einsen. Ebenso ist, wenn ich behaupte, daß ‚eins‘ soviel besagt wie ‚eine Eins‘, ‚Eins‘ die Zahl-Benennung oder der Zahl-Nenner ‚eine‘ aber Zahl, nämlich die Menge der Einsen (das Wort ‚Menge‘ nicht im strengen Sinne verstanden [vgl. Teil I. S. 57] ...); denn ‚eine‘ sagt, von ‚wieviel‘ bzw. ‚wie vielen‘ Einsen behauptet wird, sie seien vorhanden, nämlich — von einer einzigen“ (Dum ... *Quatuor* dico tantundem valere ac *quatuor unitates*; τὸ *unitates* nec numerus est, nec pars numeri, sed vel

[200]) Ich zitiere nach der von Wallis selbst veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke (1693—1699). Die Mathesis universalis ist in Band I (1695) enthalten. Ihr genauer Titel lautet: „Mathesis universalis sive, Arithmeticum opus integrum, tum Philologice, tum Mathematice traditum, Arithmeticam tum Numerosam, tum Speciosam sive Symbolicam complectens, sive Calculum Geometricum; tum etiam Rationum proportionumve traditionem; Logarithmorum item Doctrinam; aliaque, quae Capitum Syllabus indicabit“.

[201]) Wallis hat Descartes' „Geometria“ im Auge, die 1649 von van Schooten in lateinischer Übersetzung — zusammen mit den „Bemerkungen“ von Florimond de Beaune — herausgegeben und mit Kommentaren versehen wurde, ferner van Schooten's „Principia Matheseos universalis seu introductio ad Geometriae Methodum Renati Des Cartes“, herausgegeben von Bartholinus (Erstausgabe 1651).

numeri denominatio seu denominator, vel ipsum numeratum. Est autem τὸ *Quatuor* earum unitatum numerus. Ita cum *Unum* tantundem valere dico ac *unam unitatem*, μίαν μονάδα, *Unitas*, est numeri denominatio, seu denominator. *Una*, numerus est, seu unitatum multitudo, (*multitudinis* nomine laxius accepto, . . .,) dicit enim *Quot* vel *quam multae* unitates adesse dicuntur, nimirum unicam). Zwar könne man daher wohl leugnen, daß die „Unitas", die μονάς, „Zahl" sei; dem „Unum", dem ἕν, dagegen könne der „Zahl"-Charakter unmöglich abgesprochen werden.

Wir sehen hier, worin der Unterschied zwischen dem cogitare und dem dicere, wie ihn Bachet formuliert (vgl. oben S. 185), eigentlich besteht. Mit „vier" oder mit „sechs" meinen wir freilich je vier oder sechs „Einsen", aber auf dem Umwege über die allein unmittelbar aus- und angesprochene „Zahl", die eben als solche, das heißt hier: ohne das Gezählte — und folglich nur als „Symbol" — verstanden wird (vgl. oben S. 209 ff.). Diese „Indirektheit" des Anzahl-Verständnisses, die das moderne Bewußtsein kennzeichnet, kann allerdings erst gesehen werden, wenn man sich die Auffassungsweise der antiken Arithmetik vergegenwärtigt: für sie ist der Begriff der „vier" oder der „sechs" — oder auch der „Eins" — unmittelbar auf die jeweiligen Einsen — oder die jeweilige Eins — bezogen, mögen diese Einsen sinnlich wahrnehmbare Dinge oder rein noetische Gebilde darstellen und mögen weiterhin die noetischen Gebilde als eigenständige oder als bloß „abstrahierte" verstanden werden. Soviel ist klar: die ganze ontologische Problematik des antiken Anzahl-Begriffs wird für die symbolische Auffassung gegenstandslos, — sofern zunächst keine Veranlassung besteht, nach der Seinsweise des „Symbols" selbst zu fragen. Dieser Sachverhalt wird freilich ganz verzerrt, wenn man dem modernen Zahl-Begriff einfach einen besonders hohen Grad von „Abstraktheit" vindiziert, ohne zu untersuchen, welcher Art diese „Abstraktheit" eigentlich ist.

Das wahre „principium numeri" ist für Wallis — wie für Stevin — die „Null". Sie allein stellt für den Zahl-Bereich das Analogon zum geometrischen Punkt dar, was übrigens auch für den „Augenblick" innerhalb einer Zeitspanne gilt. Dies leuchte sofort ein, wenn man die rechnerischen Operationen mit den (dazugehörigen) geometrischen Konstruktionen vergleicht: „Ut ex operationibus Arithmeticis cum constructione Geometrica comparatis liquido constare possit penitius intuenti". Ausdrücklich weist Wallis den Vorwurf zurück, daß er damit die einstimmig geäußerte Meinung der Alten und der Neueren aufgebe, die alle die Unitas als principium numeri ansahen[302]). Es

[302]) Er sagt in diesem Zusammenhang u. a.: „Nihil absurdi esse [respondeo] majorum inventis addere; praesertim in Mathematicis. Nec hoc illorum laudibus quicquam detrahit: nam et illi prioribus addiderunt". (Vgl. oben S. 171, Anm. 104, Ende.)

geschehe nicht aus leichtfertigen Gründen, und außerdem könne die überlieferte Meinung mit der von ihm vertretenen in Übereinstimmung gebracht werden, wenn man folgende Unterscheidung berücksichtige: „principium“ von Etwas kann 1. dasjenige sein, was als „erstes“ ebenso beschaffen ist wie dieses Etwas selbst (primum quod sic); 2. dasjenige, was als „letztes“ nicht so beschaffen ist wie dieses Etwas selbst (ultimum quod non). Im ersten Sinne kann die Eins dann in der Tat als „principium numeri“ angesprochen werden, während die Null „principium“ im zweiten Sinne ist. Der Punkt kann allerdings „Prinzip“ nur im zweiten Sinne sein, weil bei der „magnitudo“ (der ausgedehnten und ins Unendliche teilbaren Größe) ein primum quod sic ja gar nicht angebbar ist[203]). Die Alten haben eben übersehen, daß eine Analogie nicht etwa zwischen dem „Punkt“ und der „Eins“, sondern zwischen dem „Punkt“ und der „Null“ besteht. Deshalb haben sie auch — wie im Kapitel XI (p. 53) auseinandergesetzt wird — ihre „Algebra“ nur an „geometrischen Größen“ (quantitates Geometricae)[204]) und noch dazu nur an „heterogenen“ geometrischen Größen (nempe per lineas, et superficies, simul cum solidis, aliisque etiam plurium adhuc dimensionum imaginariis quantitatibus comparatas)[205]) entwickeln können, nämlich an Gebilden, denen die Ausdrücke „latus“, „quadratus“, „cubus“ entsprechen, wozu noch die „quantitates imaginariae“, d. h. Größen von der Art der biquadratischen, quadrat-cubischen usf. hinzutreten: „Cur autem illi ad Quantitates Geometricas (potius quam Arithmeticas) et quidem Heterogeneas (potius quam Homogeneas) confugerint; nullam ego rationem video verisimiliorem, quam quod Arithmeticorum *Unum* (non vero, ut oportuit, *Nullum*) cum *Puncto* Geometrico comparabant“[206]). Es komme aber gerade darauf an, die „Algebra sive Analytice“ als eine „Universa Ars“ in den Grenzen des arithmetischen Bereichs zu halten („Quod illi per plurium dimensionum Geometricarum suppositionem conantur explicare, nos inter Arithmeticae fines continemus“) und andererseits, falls wir algebraische Sachverhalte an geometrischen Gebilden (in materia Geometrica) aufzeigen wollen, dies nur an „homogenen Größen“ (nempe vel per solas lineas, vel per solas superficies, vel per sola cor-

[203]) Diese Unterscheidung geht auf die — vor allem in der nominalistischen Schule seit Albert von Sachsen übliche — Unterscheidung des „maximum in quod sic“ und des „minimum in quod non“ zurück (vgl. Duhem, Études sur Léonard de Vinci II, 26 ff.). Anlaß zu dieser Unterscheidung geben die Kommentare zu Aristoteles, De coelo A 11.

[204]) vgl. oben S. 162 die Bemerkung Vieta's über den „geometrischen“ Charakter der antiken „Algebra“.

[205]) vgl. die Einführung des Homogeneitätsgesetzes durch Vieta, Isagoge, Cap. III, § 1 (s. oben S. 179—181) und Descartes, Regulae, Ad.-Tann. X, 456 f.

[206]) vgl. oben S. 200 f. die Meinung Stevin's, dem Wallis hier offensichtlich folgt.

pora) zu tun[207]). Jedenfalls gebührt nach der Meinung von Wallis — der sich darin in Übereinstimmung mit den Alten weiß (vgl. oben S. 189, Anm. 139). — der rein „arithmetischen" Behandlung der Algebra der Vorrang, „cum . . . revera res Arithmeticae altioris sint et magis abstractae naturae, quam Geometricae" (vgl. oben S. 210, Anm. 184): „universa Algebra est vere Arithmetica, non Geometrica; ideo potius Arithmeticis quam Geometricis principiis explicanda" (p. 56). Der Umstand, daß innerhalb der Geometrie viele Lösungen algebraisch gefunden werden könnten, bedeute nicht, daß die Algebra von Hause aus eine „geometrische" Disziplin sei; zwischen der Arithmetik und der Geometrie bestehe vielmehr eine sehr enge Verwandtschaft („ob intimam Arithmeticae Geometriaeque affinitatem illud evenit"), genauer gesagt: die Geometrie sei der Arithmetik gewissermaßen untergeordnet, sie wende nur die universalen Aussagen der Arithmetik auf ihre „speziellen" Gegenstände an („. . . quoniam Geometria sit Arithmeticae quasi subordinata, adeoque universalia Arithmetices effata rebus suis specialiter applicet"), wobei unter die universalen Aussagen der „Arithmetik" eben auch die im engeren Sinne „algebraischen" fallen („Atque eadem omnino ratio est operationum omnium sive Arithmeticarum sive speciatim Algebricarum").

Wir hatten gesehen, wie die Doppel-Stellung der logistice speciosa bei Vieta, nämlich als „allgemeiner Analytik" einerseits und als einer auf die Diophantische „Arithmetik" unmittelbar bezogenen Kunst andererseits, auch deren Gegenstand einen doppelten Charakter verleiht: die species ist eine „allgemeine" Größe, die zugleich eine wesentlich „arithmetische" Bestimmung aufzuweisen hat (vgl. S. 179 ff.). Bei Vieta liegt hierbei der Nachdruck zweifellos auf der Universalität der species. Denselben Doppelcharakter zeigen nun auch die algebraischen Größen, die „symbola seu species", bei Wallis (vgl. p. 58), nur daß bei ihm deren „arithmetische" Beschaffenheit stärker in die Augen fällt: sie sind hier eindeutig „numeri" — „Zahlen". Daher ist für sie die Forderung der „Homogeneität" („omnes . . . quantitatum comparationes quoad aequalitatem, inter Homogeneas tantum sunt faciendae") sozusagen „von selbst" erfüllt (p. 56 f.): algebraische Gleichungen sind von sich aus „homogen" („saepissime . . . contingit aequationes fieri inter varias potestates non ejusdem altitudinis [Wallis gibt als Beispiele: $2a^2 = 6a$ und $2a^3 = 6a^2$]; quod quamvis satis conveniat Gradibus Arithmeticis, Geometricis tamen dimensionibus neutiquam convenit"). Die „Gradus Arithmetici" sind nämlich nichts anderes als „numeri continue proportionales" (vgl. oben S. 179, bes.

[207]) vgl. dazu den cartesischen Entwurf der „geometrischen Algebra" in den „Regulae".

Anm. 119 und 120)[208]), alle numeri aber — so argumentiert Wallis — sind „homogen": „cum ... numeri omnes (proprie dicti) ex unitatibus constituantur (...) sunt vere Homogeneae [sc. quantitates] ..."[209]); folglich sind auch die „algebraischen" Größen als numeri unter sich „homogen". Diese Argumentation scheint nun gerade dem universalen Charakter der „algebraischen Zahlen" nicht gerecht zu werden. Sie ist ja nur schlüssig, wenn die algebraischen „numeri" eben auch als „numeri proprie dicti" aufgefaßt werden. Sie läßt mit anderen Worten die algebraischen „Zahlen" — ganz in der Weise Diophants — als „Anzahlen von Einsen" erscheinen (wenn wir in diesem Zusammenhang von den „Brüchen" und den „numeri surdi", den „irrationalen Zahlen", absehen wollen). In Wirklichkeit setzt aber diese Argumentation umgekehrt bereits ein „symbolisches" Verständnis auch der gewöhnlichen „Anzahlen", der numeri proprie dicti, voraus (vgl. oben S. 226 f. und 183 f.)[210]). Die „Homogeneität" sowohl aller „gewöhnlichen" als auch aller algebraischen „Zahlen" untereinander ergibt sich für Wallis faktisch aus ihrer Zugehörigkeit zu ein und derselben „Gattung" — eben der „Zahl"-Gattung als solchen. Die Einheit dieser „Gattung" bekundet sich unmittelbar in der Gemeinsamkeit des Zeichen-Charakters aller ihrer Glieder: darum und nur darum erscheinen diese als „homogen". Die Homogeneität ist hier nicht mehr — wie bei Vieta — eine unerläßliche Bedingung für das Operieren mit

---

[208]) Nachdem Wallis (p. 52—53) gezeigt hat, daß innerhalb des Positionssystems — gleichgültig ob wir das Zehner-System, das Vierer-System oder irgend ein anderes sonst zu Grunde legen:

„In proportione { decupla, 2,7 / quadrupla, 1,2,3 / tripla, 1,0,0,0 } tantundem valent" —

die aufeinander folgenden Stellen-Einheiten eine geometrische Progression („gradus ascendentes et descendentes" [vgl. Vieta, Isagoge, Cap. I u. III, ferner auch Descartes, Regulae, Ad.-Tann. X, 457, 2—3, und oben S. 199, Anm. 162]) bilden, sagt er, es sei hervorzuheben: „Universam Artem *Algebrae* sive *Analytices* hoc uno quasi fundamento niti: Atque si haec, quae de Gradibus (in quacunque ratione Ascendentibus et Descendentibus) diximus, satis intelligantur; magnam exinde affulgere lucem ad *Potestates* (quas vocant) *Algebricas* intelligendas, et rite tractandas. Nam revera, quod nobis nunc est *gradus* (sive Ascendens, sive Descendens,) *primus, secundus, tertius*, etc. illud est Algebristis *Latus, Quadratus, Cubus*, etc. vel *Potestas prima, secunda, tertia*, etc. ...". Zum Ausdruck „potestas" vgl. oben S. 182, Anm. 127. In dem verallgemeinerten Sinne, in dem ihn Wallis gebraucht, stammt er von Oughtred (vgl. Tropfke II$^3$, 161).

[209]) vgl. S. 181, Anm. 126. — Wallis gibt übrigens als Beispiele: 2 Hunderter = 20 Zehner und 2 Tausender = 20 Hunderter (vgl. oben S. 137 und 147).

[210]) Die oben im Text von Wallis eingeklammerten und von mir ausgelassenen Worte lauten: „vel saltem ad unitatem vere rationem habeant". Sie heben den Sinn des Hauptsatzes auf und zeigen unmittelbar die Zweideutigkeit, die der Ausdruck „numeri proprie dicti" bei Wallis besitzt: s. weiter unten S. 232 ff.

„algebraischen Größen“, sondern kennzeichnet von vornherein deren Bestand: sie sind wesentlich homogen und gerade darum „universal“. So kann Wallis anläßlich der Erörterung der algebraischen Nomenklatur sagen (p. 57): „Sufficiat saltem monuisse, varias Potestates Algebricas, quocunque appellentur nomine, nil aliud esse quam Numeros sive Lineas sive alias etiam quantitates invicem homogeneas, continue proportionales“. Andererseits hindert diese Universalität der „potestates algebricae“ nicht, daß ihnen ein „numerischer“ Charakter beigelegt wird, daß sie „arithmetisch“ bzw. „logistisch“ interpretiert werden. Mit anderen Worten: sie werden nicht als bloße (Verweisungs-)Zeichen, sondern als Symbole angesehen: sie „vertreten“ nicht nur, sondern „sind“ in sich selbst mathematische Gegenstände.

Als Symbole sind sie sowohl „allgemeine Größen“ als eben auch — „Zahlen“. Deshalb bedarf es bei Wallis für die einzelnen algebraischen „Zahlen“ keiner besonderen „Stufen“-Bezeichnung mehr. Die Dimension, genauer: die „altitudo“ einer algebraischen Größe ändert nicht mehr die „Gattung“ dieser Zahlen (vgl. oben S. 179 f.). Alle möglichen „Zahlen“ gehören nunmehr ein und derselben — dimensionslosen — „Gattung“ an: ihre Homogeneität ist identisch mit ihrem symbolischen Charakter als solchen[211]).

Das Gesagte läßt sich genauer in folgender Weise bestätigen. — Die entscheidende Differenz zwischen der „methodus symbolica“ und dem antiken Verfahren liegt, wie wir gesehen haben, in der Auffassung der „Eins“: für die Alten war sie (als „reine“ Eins) das principium numeri und als solche schlechthin unaufteilbar (vgl. Teil I, S. 58, 47 ff. und 102), für die „Modernen“ ist die Eins „ut quid continuum“ in beliebig viele (gleiche) Teile teilbar (Wallis, Cap. XII, p. 60; vgl. auch Cap. XLI, p. 210: „. . . infinitam Geometriae divisibilitatem, cum quodammodo imitari velit Arithmetica; supponit Unitatem sive Unum, quasi jam quid integrum, in quotvis Partes divisibile“). Dementsprechend müssen die Neueren auch die „numeri“ anders als die Alten verstehen. Von den Alten gilt: „vix alios numeros quam Integros admiserint; (nec enim materiam Arithmeticam sicut Geometricam, in infinitum divisibilem admiserunt, sed in unitate sistendum voluere)“ (Cap. XXXV, p. 183 [vgl. Teil I, S. 49 f.]); „apud quos [sc. Euclidem aliosque] numerorum appellatione non nisi Integri insigniuntur“ (Cap. XLI, p. 210; vgl. Cap. XIX, p. 93: Euclides „de veris tantum numeris et proprie dictis (integros intellige) verba facit, qui ex Unitatibus componuntur; adeoque Unitatem semper habet pro indivisibili, quodque est, in numeris, minimum quod sic . . .“ [vgl. S. 228, Anm. 203]). Die

[211]) In unausdrücklicher Weise ist dies bereits bei Harriot und Oughtred einerseits und bei Stevin und Descartes andererseits der Fall.

Neueren dagegen sind auf Grund der inneren Stetigkeit, der „Kontinuität“ der Eins sowohl wie des gesamten numerischen Bereichs berechtigt, auch von gebrochenen Zahlen (numeri fracti), von irrationalen Zahlen (numeri surdi) und ebenso von „algebraischen Zahlen“ zu sprechen. Aber wir dürfen nicht vergessen: als „kontinuierlich“ lassen sich die numeri und vor allem die Eins selbst nur von einer symbolischen Auffassung her, genauer: nur in symbolischer Abstraktion, charakterisieren (vgl. oben S. 202ff. und 211 f.). Deshalb hat Wallis, der stets bemüht ist, soweit wie möglich der Überlieferung treu zu bleiben und die antike Terminologie beizubehalten, einerseits zwar durchaus Bedenken, z. B. die Brüche als „numeri“ zu verstehen: „Sunt autem *Fractiones*, seu *Numeri fracti*, non tam numeri, quam *Unitatis fragmenta*“ (Cap. XII, p. 60); „concedo etiam numeros quos *Fractos* vocant, sive *Fractiones*, esse quidem *Uni* et *Nulli* quasi intermedios [vgl. oben S. 142 f.]. Sed addo, quod jam transitur εἰς ἄλλο γένος . . . adeoque numerus Fractus non tam Numerus est, quam numerorum ad invicem Rationis indicium“ (Cap. IV, p. 27). Aber gerade diese letzte Bestimmung zeigt andererseits, daß die „Brüche“ in der Tat nichts anderes als „Zahlen“ sind. Liegt doch nach Wallis jeder „Zahl“ als solcher eine „Ratio“, ein „Verhältnis“ zu Grunde. Bei der Erörterung des 5. Buches der Euklidischen Elemente (also der „allgemeinen Proportionenlehre“), dessen Sätze Wallis „arithmetisch“, d. h. algebraisch zu beweisen unternimmt (Cap. XXXV)[212]), sagt er (p. 183): „Dieses fünfte Grundbuch ist nämlich — wie die gesamte Verhältnislehre überhaupt — eher arithmetisch als geometrisch . . . Ja, auch die gesamte Arithmetik als solche scheint, wenn man genauer hinsieht, nichts anderes als eine Verhältnis-Lehre zu sein. Und die Zahlen selbst nichts anderes als die ‚Angeber‘ ebensovieler Verhältnisse, deren zweites Glied Eins ist. Wenn nämlich die Eins als das [identische] Bezugsquantum genommen wird, so sind alle übrigen Zahlen — sowohl die ganzen, wie die gebrochenen, wie auch die irrationalen — die ‚Angeber‘ oder ‚Anzeiger‘ ebensovieler gegenüber dem Bezugsquantum möglicher [unter sich] verschiedener Verhältnisse“ („Est autem illud Elementum quintum, ut et tota rationum Doctrina, Arithmetica potius quam Geometrica . . . Quid quod et ipsa Arithmetica tota, si strictius spectetur, vix aliud videatur quam Rationum doctrina. Ipsique Numeri rationum totidem indicia quarum communis consequens[213]) est 1, Unitas. Ubi enim 1, sive

[212]) Cap. XXIII behandelt in derselben Weise Euklid II.

[213]) Cap. XXV, p. 134: „. . . comparatorum, alterum *Antecedens* dici solet, alterum *Consequens* . . . Puta si A ad B comparatur; A dicitur Antecedens, B Consequens . . .“. Diese Terminologie geht auf Leonardo von Pisa zurück (vgl. Tropfke III², 18).

Unitas, habetur pro *quantitate exposita*; reliqui omnes numeri (sive integri, sive fracti, sive etiam surdi) sunt rationum totidem aliarum ad expositam quantitatem indices sive exponentes" [214]). Eine „Zahl" bedeutet also hier nicht mehr eine „Anzahl von . . .". Eine „Zahl" zeigt vielmehr ein bestimmtes „Verhältnis", einen λόγος im Sinne von Euklid V, Def. 3—5 an und läßt sich nur von diesem Verhältnis aus als „ganze" oder als „gebrochene" oder als „irrationale" (kürzer: als „rationale" oder als „irrationale") Zahl bezeichnen. Der eigentliche Grund für diese Deutung der „Zahl" durch Wallis wird aber nun erst aus folgender Argumentation ersichtlich.

Im Kapitel XXV der „Mathesis universalis" wird erstmalig auf das In-Beziehung-Setzen, die „comparatio" von Größen untereinander eingegangen. Gemäß der Homogeneitätsforderung (Euklid V, Def. 3) können nur „gleichartige" Größen miteinander „verglichen" werden, in ein „Verhältnis" zueinander treten („quantitates non nisi *homogeneas* comparandas esse, et quidem prout sunt homogeneae"). Es gibt aber zwei Möglichkeiten, solche Größen zu „vergleichen": entweder kann man danach fragen, ob bzw. um welches „Stück" oder um „Wieviel" die eine Größe die andere überragt, d. h. welche „Differenz" zwischen ihnen besteht; oder aber wieviel Mal die eine Größe die andere enthält bzw. der wievielte Teil der einen die andere bildet, d. h. welches „Verhältnis" (im engeren Sinne) zwischen ihnen besteht (p. 134). Der wesentliche Unterschied zwischen „Differenz" (differentia) und „Verhältnis" (ratio) ist folgender (p. 135—136). Die jeweilige „Differenz", die durch Subtraktion (subductio) ermittelt wird, ist stets von der gleichen Art wie die „verglichenen" Größen, woraus folgt, daß die Differenzen selbst nicht ohne weiteres miteinander „verglichen", zueinander in Beziehung gesetzt werden können. Dagegen ergibt sich die jeweilige „ratio" aus der Division der einen Größe durch die andere; sie ist mit anderen Worten an dem „Quotienten" als dem Ergebnis dieser Division abzulesen; jeder „Quotient" einer Division ist aber ein „numerus", denn: entweder sind Dividendus und Divisor „von gleicher Art" (homogen), in welchem Falle sie die gleiche Anzahl von „Dimensionen" [215]) haben, — dann gibt der Quotient eben

[214]) Zum Terminus „exponens" vgl. S. 206, Anm. 176, gegen Ende.

[215]) „Dimension" ist hier genau wie bei Descartes („Regulae", X, 447—449) verstanden, nur daß bei diesem die Dimensionslosigkeit der numeri selbst nicht mit dem gleichen Nachdruck wie bei Wallis betont wird. Das liegt daran, daß für Descartes die „Figuren", mit denen die Mathesis universalis operiert, genau so symbolisch wie die „Zahlen" sind (vgl. oben S. 214—217). Bei Wallis bleibt dagegen — wie bei Vieta — die traditionelle Auffassung der geometrischen Gebilde gewahrt, was übrigens auch für die Folgezeit gilt. Diese eigentümliche Stellung der Geometrie innerhalb der symbolischen Mathematik ist von wesentlicher Bedeutung für die Entwicklung der mathematischen Physik.

an, wie oft bzw. wieviel Mal die eine Größe in der anderen enthalten ist, womit gesagt ist, daß der Quotient selbst keine Dimension hat (vgl. p. 103: „ubi species aliqua per aliam totidem praecise dimensionum dividitur, quantitas nullius dimensionis oritur"); oder aber Dividendus und Divisor sind „von verschiedener Art" (heterogen), d. h. haben nicht die gleiche Anzahl von Dimensionen, — dann handelt es sich nicht eigentlich um eine Division, sondern um eine „applicatio"[216]), bei deren Durchführung aber die betreffenden Größen „so wie" numeri behandelt werden („quantitates illae singulae ad instar numerorum considerantur") und folglich als Quotienten ebenfalls einen — dimensionslosen — numerus liefern[217]). Alle „Quotienten" also — und das heißt auch: alle rationes, alle Verhältnisse, gleichgültig welcher Art von Größen — sind als „dimensionslose" Gebilde „gleichartig (homogen) und können alle miteinander „verglichen" werden („Atque hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunque ad invicem quantitatum, esse inter se homogeneas*"; „Ubi . . . comparatio fit quoad Rationem, quae emergit ratio comparatorum genus non raro [nämlich mit alleiniger Ausnahme des genus der numeri, des „genus numerosum" selbst] deserit, et transit in genus numerosum, cujuscunque sint generis quae comparantur"). Das aber bedeutet nichts anderes, als daß alle numeri homogen sind. Ihre Homogeneität ist identisch mit ihrer Dimensionslosigkeit. Diese wiederum ist identisch mit der „angebenden" oder „anzeigenden" Rolle der numeri als der „indices rationum", die unmittelbar in der Zeichenschrift, in der „notatio" sichtbar wird: die Dimensionslosigkeit der „numeri" ist also tatsächlich mit ihrem symbolischen Charakter identisch. Deshalb kann man bei Wallis (ebda.) lesen: „und da so das ‚Doppelte' und die ‚Hälfte', das ‚Dreifache' und das ‚Drittel' usf. als Namen von Verhältnissen aufzufassen sind, andererseits die Symbole der Hälfte und des Drittel: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ zu den Zahlen (nämlich den gebrochenen) ge-

[216]) Entsprechend dem griechischen Terminus: παραβολή (vgl. z. B. Zeuthen, Die Math. im Altertum u. im Mittelalter, S. 38). Solche applicationes „nonnisi καταχρηστικῶς Divisiones vocantur" (p. 135). — Es ist daran zu erinnern, daß auch Vieta, der im Falle der Division das Homogeneitätsgesetz gerade nicht anerkennt, für „dividieren" den Terminus „adplicare" verwendet (vgl. oben S. 178 und S. 181, Anm. 123, ferner Isagoge, Cap. IV, Praeceptum IV).

[217]) Der dritte Fall: Division einer Größe (von bestimmter Dimension) durch einen (dimensionslosen) numerus, „non tam divisio est . . . quam multiplicatio; (nempe quantitas A non tam dividitur per 2, quam multiplicatur per $^1/_2$;) quippe non quaeritur, quoties *numerus* 2 contineatur in *magnitudine* A (quod absurdum esset) sed datae quantitati A, alia in data ratione quaeritur; quod *Multiplicationis* est, potius quam *Divisionis* opus; quippe quae in Multiplicatione Ratio datur, in Divisione quaeritur" (p. 135—136).

rechnet werden, warum sollte das nicht auch von den Symbolen des Doppelten oder des Dreifachen: $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$ oder 2, 3 gelten?" (Et quidem cum duplum et dimidium, triplum et triens, etc. perinde pro rationum nominibus habenda sint; dimidii autem et trientis notae $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, numeris (fractis) accenseantur; quidni et dupli, triplive notae $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, vel 2, 3 [vgl. p. 103]). Von der „notatio" aus wird also Wallis dazu geführt, die „Einsen" bzw. die „Eins" als „Nenner" anzusprechen (s. oben S. 226 f.). Und ausdrücklich fügt er an eben dieser Stelle hinzu: „Und hauptsächlich aus diesem Grunde behaupte ich, daß die gesamte Verhältnis-Lehre mehr zur arithmetischen als zur geometrischen Betrachtungsweise gehört" (Atque hac potissimum de causa, ego totam Rationum doctrinam Arithmeticae potius quam Geometricae speculationis autumo[218]). — Mit anderen Worten: die auf der Homogeneität aller „Zahlen" beruhende Universalität der Arithmetik als einer „allgemeinen Verhältnis-Lehre" ist nur von der symbolischen Umdeutung der antiken Anzahlen aus verständlich. Der Gegenstand der zur Algebra erweiterten Arithmetik bzw. Logistik ist nun als „Zahl" bestimmt, und das heißt: als symbolisch begriffene ratio, — im Einklang mit der Auffassung der Algebra als einer allgemeinen Proportionen- (und Rationen-) Lehre (s. oben S. 187 ff.). Den „Stoff" dieser universalen und grundlegenden Wissenschaft bilden nicht mehr „reine" Einsen, um deren Seinsweise gestritten werden kann, indem sie entweder als eigenständige oder als durch Aphairesis gewonnene Gebilde begriffen werden, sondern — „Zahlen", deren Sein gar kein Problem mehr bietet, weil sie als Ergebnisse der symbolischen Abstraktion unmittelbar in der Zeichenschrift faßbar sind.

[218]) Die unmittelbare Fortsetzung dieser Stelle lautet: „totumque Euclidis Elementum quintum Arithmeticum esse, utut speciatim de Magnitudinibus efferantur propositiones, quae interim non minus recte de Quantitatibus simpliciter quibusvis efferi possent, quo sensu apud Euclidem μεγέθη intelligenda sunt".

# Autorenverzeichnis.



**Literaturhinweise und Besprechungen.**



